ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Олимпиада по математике среди студентов 1-3 курсов
11 февраля 2016г.

Задача 1. (2 балла) Определитель 2015-го порядка повернули на 90^0 по часовой стрелке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2015} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2015} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{2015,1} & a_{2015,2} & \dots & a_{2015,2015} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{2015,1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\ a_{2015,2} & \dots & a_{22} & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{2015,2015} & \dots & & a_{1,2015} \end{vmatrix}.$$

Как изменится его значение?

Задача 2. (2 балла) Дана последовательность $a_1 = a > 2$,

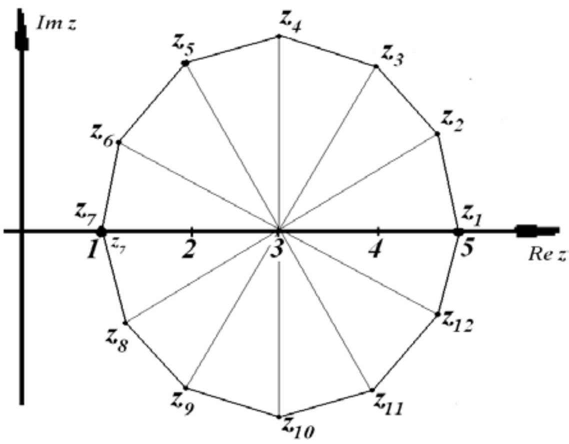
$$a_2 = \frac{5}{4+a},\ a_3 = \frac{5}{4+\frac{5}{4+a}},\ a_4 = \frac{5}{4+\frac{5}{4+\frac{5}{4+a}}},\dots$$ Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Задача 3. (4 балла) Найти производную n–го порядка функции $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}$.

Задача 4. (4 балла). Сколько решений имеет уравнение $f(x)=0$, если

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2016}?$$

Задача 5 (8 баллов). Даны 12 точек на комплексной плоскости, лежащие в вершинах правильного 12-угольника (см. рисунок). Найдите произведение всех этих чисел.



Задача 6 (5 баллов). Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний от каждой из которых до двух данных точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ есть постоянная величина a^2.

Зав. кафедрой математики Н.Ю.Фаткуллин.

Решения задач.

Задача 1. (2 балла) Определитель 2015-го порядка повернули на 90^0 по часовой стрелке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,2015} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,2015} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{2015,1} & a_{2015,2} & \cdots & a_{2015,2015} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{2015,1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \\ a_{2015,2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{2015,2015} & \cdots & & a_{1,2015} \end{vmatrix}$$

. Как изменится его значение?

Решение. Один определитель получается из другого 1007 перестановками столбцов и последующим транспонированием. Ответ: изменит знак на противоположный.

Замечания. Результат зависит от порядка определителя: при n=2,3,6,7,… знак меняется, при n=4,5,8,9,… – нет. Точнее, если C_n^2 нечетно, то знак не сменится.

Задача 2. (2 балла) Дана последовательность $a_1 = a > 2$,

$$a_2 = \frac{5}{4+a},\ a_3 = \frac{5}{4+\frac{5}{4+a}},\ \ a_4 = \frac{5}{4+\frac{5}{4+\frac{5}{4+a}}},\ldots.$$

Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение. Эта последовательность ограничена $0<a_n<5/4$, $n>=2$. Из построения последовательности имеем $a_n = \frac{5}{4+a_{n-1}}$. Предельным переходом получаем $A = \frac{5}{4+A}$ или $A=1$.

Замечания. Строгое доказательство того, что A=1 действительно является пределом проводится через оценку производной $\left|\left(\frac{5}{4+x}\right)'_x\right|_{x=1} < 1$. Однако, на олимпиаде достаточно было приведенных выше эвристических рассуждений.

Задача 3. (4 балла) Найти производную n–го порядка функции $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}$.

Решение. $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}=\dfrac{2-(1-x)}{\sqrt[3]{1-x}}=2(1-x)^{-1/3}-(1-x)^{2/3}$.

Тогда,

$$f^{(n)}(x)=2(-1)^n\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\ldots\cdot\frac{-2+3n}{3}(1-x)^{\frac{-1-3n}{3}}-$$

$$+(-1)^n\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\ldots\cdot\frac{-5+3n}{3}(1-x)^{\frac{2-3n}{3}},\quad n\ge 2.$$

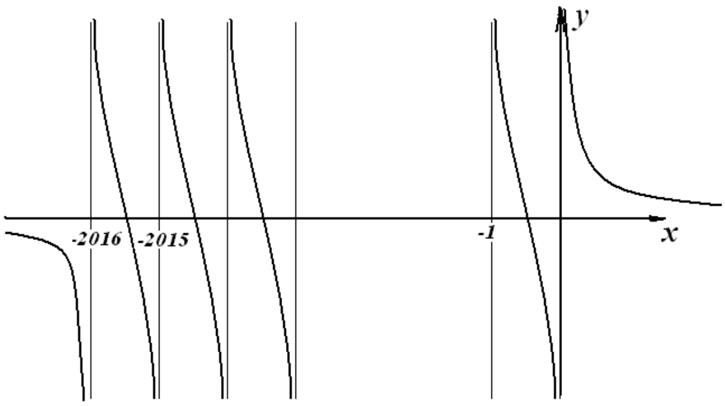
Задача 4. (4 балла). Сколько решений имеет уравнение $f(x)=0$, если

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\ldots+\dfrac{1}{x+2016}$.

Решение. Функция $f(x)$ имеет 2017 точек разрыва второго рода: $x=0,–1,–2,...,–2016.$

Причем в точках разрыва

$\lim\limits_{x\to p-0} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to p+0} f(x)=+\infty,$



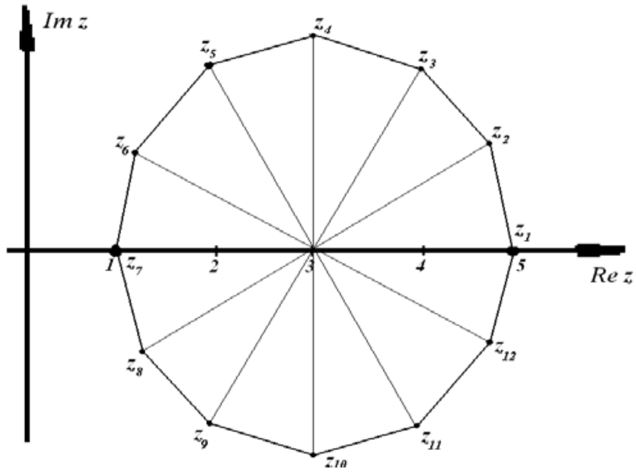
При $p=0,–1,–2,...,–2016.$

На бесконечности: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0.$

Производная

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\ldots-\dfrac{1}{(x+2016)^2}$ отрицательна на всех промежутках непрерывности. Из рисунка видно, что корней 2016.

Задача 5 (8 баллов). Даны 12 точек на комплексной плоскости, лежащие в вершинах правильного 12-угольника (см. рисунок). Найдите произведение всех этих чисел.



Решение. Запишем произведение в виде:

$$(3+2w_1)(3+2w_2)\cdot\ldots\cdot(3+2w_{12})=$$

Здесь $w_1, w_2, \ldots, w_{12}$ – корни 12й степени из 1. Далее, раскрыв скобки, получаем:

$$3^{12}+2^{12}w_1w_2...w_{12}+12\cdot 3^{11}\cdot 2(w_1+w_2+\ldots+w_{12})+\ldots$$

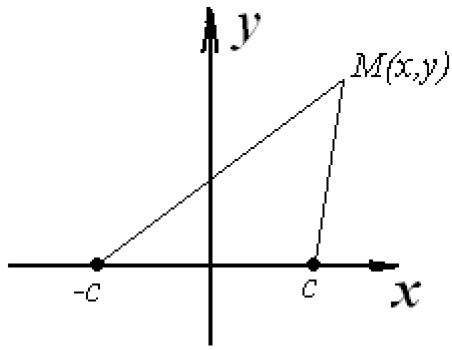
$$+12\cdot 3\cdot 2^{11}(w_2...w_{12}+w_1w_3...w_{12}+...+w_1w_2...w_{11})=3^{12}-2^{12}=527345.$$

Все скобки равны нулю по теореме Виета (числа являются корнями $w^{12}-1=0$).

Замечания. Допускалось непосредственное вычисление произведения с учетом $w_n=2(\cos(\pi n/12)+i\sin(\pi n/12)),\ n=0,1,2,...,11.$

Задача 6 (5 баллов). Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний от каждой из которых до двух данных точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ есть постоянная величина a^2.

Решение. Напишем условие задачи в аналитическом виде: $|MF_1|\cdot|MF_1|=a^2$:



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2,$$

$$(x^2-2cx+c^2+y^2)(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4,$$

$$(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2=a^4,$$ или

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=a^4-c^4.$$

Замечания. Итоговый вид уравнения в ответе при оценивании работы был не важен – главным был факт получения алгебраического уравнения из геометрического условия.

Просьба замечания и предложения отправлять по адресу lazva@mail.ru

(Лазарев Владимир Анатольевич)