



Вариант №1

Задача 1. (3 балла). Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2011} \cdot \sqrt[2]{2011} \cdot \sqrt[3]{2011} \cdot \sqrt[4]{2011} \cdot \dots \cdot \sqrt[n \cdot (n+1)]{2011} \right)$.

Задача 2. (4 балла). Найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1}$.

Задача 3. (5 баллов). Найти общее решение дифференциального уравнения $5y + (y')^2 = x(x + y')$.

Задача 4. (3 балла). Решить уравнение $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = e^{x^2} (5x + 4)$.

Задача 5. (5 баллов). Два клиента получили от банка «Незабудка» письма с требованием срочного внесения платежа по кредиту в один из трех дней: 1 декабря, 2 декабря или 3 декабря. Каждый из них решил обратиться в банк «Незабудка» с просьбой об отсрочке платежа в один из указанных дней (равновероятен любой из этих дней). Согласно внутренним инструкциям банка вероятность получить отсрочку по платежу для любого клиента постоянна и равна 0,5. Однако со 2 декабря руководство банка решило снизить эту вероятность до 0,25. Какова вероятность того, что только один из клиентов получит отсрочку по платежу?

Задача 6. (5 баллов). **Что? Где? Когда?** Знатоки и телезрители играют в «Что, где, когда» до шести побед – кто первый выиграл шесть раундов, тот и победил в игре. Вероятность выигрыша Знатоков в одном раунде равна 0,6, ничьих не бывает. Сейчас Знатоки проигрывают со счетом 3:4. Найдите вероятность того, что Знатоки все же выиграют.

Задача 7. (5 баллов). Найти решение дифференциального уравнения $x^2 y'' = (e^y - 2x)y'$
 $y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$.

Задача 8. (6 баллов). Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$.

Задача 9. (7 баллов). Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^n$.

Задача 10. (7 баллов). Разложить в ряд Фурье функцию $y = \arcsin(\sin x)$.



Вариант №2

Задача 1. (3 балла). Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1102} \cdot {}^2\sqrt{1102} \cdot {}^3\sqrt{1102} \cdot \dots \cdot {}^{n \cdot (n+2)}\sqrt{1102} \right)$.

Задача 2. (4 балла). Найти сумму числового ряда

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} + \dots$$

Задача 3. (5 баллов). Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'' + \frac{(y')^2}{y} = x' + \frac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1. \end{cases}$$

Задача 4. (3 балла). Решить уравнение $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+5}{n!} x^n = e^x (6x+2)$.

Задача 5. (5 баллов). Чтобы поймать двух диких зубров для размножения, в Беловежскую пущу послали экспедицию. Предположим, что зубры бродят по пуще в одиночестве в случайных направлениях. Вероятность p того, что пойманный зубр – самец, не зависит от предыдущих результатов ($0 < p < 1$). Для того, чтобы получить пару, пришлось поймать 5 зубров. При этом условии найти вероятность того, что пятый зубр оказался самцом.

Задача 6. (5 баллов). Легкие номера. В городе, где живет Рассеянный Ученый, телефонные номера состоят из 7 цифр. Ученый легко запоминает телефонный номер, если этот номер палиндром, то есть он одинаково читается слева направо и справа налево.

Например, номер 4435344 Ученый запоминает легко, потому что этот номер палиндром. А номер 3723627 не палиндром, поэтому Ученый такой номер запоминает с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Ученый запомнит легко.

Задача 7. (5 баллов). Найти решение дифференциального уравнения $xy'' = (\sin y - 1)y'$
 $y(1) = 0, \quad y'(1) = -1$.

Задача 8. (6 баллов). Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$.

Задача 9. (7 баллов). Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \ln \frac{2n+1}{2n-1} \right) - 1$.

Задача 10. (7 баллов). Разложить в ряд Фурье функцию $y = \arccos(\cos x)$.

