Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра математики

Учебно-методическое пособие

для студентов заочной формы обучения

по дисциплине

Дополнительные главы по дисциплине «Математика»

(раздел математики «Уравнение математической физики»)

(IV семестр)

Для студентов специальностей (специалитет):

Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений (ГР),

Технология бурения нефтяных и газовых скважин (ГБ)

УФА 2019 г.

Составитель доцент Сахарова Л.А.,

ст. преподаватель Сокова И.А.,

Рецензент: доцент Умергалина Т.В.

доцент Хайбуллин Р.Я.

Издание рекомендовано для направления подготовки «Нефтегазовые техника и технологии» специальности ГБ, ГР

Рекомендации студентам заочного отделения

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнить в тетради, на передней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный шифр (номер студенческого билета). Номер варианта контрольной работы определяется последней цифрой шифра.

2. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Рекомендуется делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формулы, теорем, выводов, которые используются при решении.

3. Все вычисления должны быть приведены полностью, чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно, четко, с указанием единиц масштаба, координатных осей, обозначения к задачам должны соответствовать указаниям на чертеже.

4. Для удобства рецензирования преподавателем контрольной работы следует оставлять на каждой странице поля.

В период экзаменационной сессии на зачете студент обязан представить зачтенную контрольную работу и по требованию преподавателя дать устные пояснения ко всем задачам, содержащимся в работе.

Студент выполняет вариант контрольной работы, который совпадает с порядковым номером в списке группы. Для получения допуска на экзамен (зачет), контрольные работы необходимо сдать за месяц до начала следующей сессии в деканат заочного факультета для регистрации работы. Во избежание утери, зарегистрированную работу рекомендуется занести на кафедру математики (3-204 с 9.00 до 16.00).

Дополнительную информацию Вы можете найти на сайте кафедры математики http//www.math.rusoil.net. Здесь же выложено методическое пособие с заданиями для контрольных работ.

(образец титульного листа)

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра математики

Контрольная работа

дисциплина:

Дополнительные главы по дисциплине «Математика»

Вариант №____

Выполнил(а):

Ф.И.О. (студента)

ст. гр. _______________

шифр №____________

Проверил

Ф.И.О. (преподавателя)

Уфа 201_ г.

Введение в теорию уравнений математической физики

Многие задачи механики и физики могут быть сведены к дифференциальным уравнениям в частных производных. Математическими моделями реальных процессов являются краевые задачи для дифференциальных уравнений при определенных граничных и начальных условиях. При этом оказывается, что одно и то же уравнение может описывать совершенно различные по своей природе явления и процессы. Поэтому при исследовании довольно широкого круга задач механики и физики требуется сравнительно небольшое число различных видов дифференциальных уравнений. Изучением таких уравнений, методами их решения занимается раздел математики «Уравнения математической физики».

В нашем курсе мы будем заниматься уравнениями второго порядка. С помощью этих уравнений можно исследовать в первом приближении основные физические процессы: колебания, теплопроводность, диффузию, течение жидкостей и газа, электростатические явления.

Для решения своих проблем теория «Уравнений математической физики» использует различный математический аппарат: ряды Фурье, интегралы Фурье, интегральные преобразования (Лапласа, Фурье), функции комплексного переменного и др.

Специфическим для уравнений математической физики является то, что здесь постановка задач для уравнений в частных производных делается исходя из физических соображений. Процесс получения решения этих задач основывается на математических методах, но в каждом конкретном случае само решение той или иной задачи должно иметь определенную физическую интерпретацию.

1. Дифференциальные уравнения в частных производных. Основные определения и понятия

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**</u> Уравнение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные, называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Порядок высшей частной производной, входящей в уравнение, определяет **порядок уравнения.**

Для функции $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$ n независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ уравнение k-го порядка имеет вид

$$F\left(x_1, ..., x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial U}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0. \qquad (1)$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = k.$$

Обычно приходится иметь дело с уравнениями для функций двух, трех, четырех переменных.

Общий вид уравнений первого и второго порядков для функции $U = U(x, y)$ двух переменных соответственно таков:

$$F(x, y, U, U_x, U_y) = 0, \qquad (2)$$

$$F(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}) = 0, \qquad (3)$$

где

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Решением уравнения в частных производных (1) называется всякая функция $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$ ($U = U(x, y)$ для уравнений (2), (3)), которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Познакомимся (без доказательства) с простейшими свойствами уравнений в частных производных на примерах некоторых их видов для функции двух переменных.

Рассмотрим для функции $U(x, y)$ уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \qquad (4)$$

Ясно, что искомая функция $U(x, y)$ не зависит от переменной x, но может быть любой функцией от y:

$$U = U(x, y) = \varphi(y), \tag{5}$$

поскольку, дифференцируя $\varphi(y)$ по x, мы получим нуль, а это значит, что равенство (4) выполняется. Следовательно, решение (5) содержит одну произвольную функцию $\varphi(y)$. В этом и заключается коренное отличие решения уравнения в частных производных первого порядка от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения того же порядка, которое содержит лишь произвольную постоянную. По аналогии решение (5), содержащее одну произвольную функцию, будем называть **общим решением уравнения** (4).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F(y), \tag{6}$$

где $F(y)$ - заданная функция. Все функции $U(x, y)$, удовлетворяющие уравнению (6), имеют вид

$$U(x, y) = \int F(y) dy + \Psi(x), \tag{7}$$

где $\Psi(x)$ - произвольная функция от x. Это можно проверить, дифференцируя обе части равенства (7) по y. Найденное решение данного уравнения зависит от одной произвольной функции $(\Psi(x))$, т.е. является общим.

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \tag{8}$$

Положим, $U = V$, после чего уравнение (8) примет вид $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$. Однако, как установлено, общее решение уравнения $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ имеет вид (5), т.е. $V = F(y)$, где $F(y)$ - произвольная функция. Исходное уравнение (8) перепишем так:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F(y).$$

Согласно (7) его общим решением будет функция

$$U(x, y) = \int F(y) dy + \Psi(x).$$

Так как $F(y)$ - произвольная функция, то интеграл от нее будет также произвольной функцией y, которую обозначим через $\Phi(y)$. В результате решение принимает вид

$$U(x,y) = \Psi(x) + \Phi(y), \qquad (9)$$

где $\Psi(x)$, $\Phi(y)$ - произвольные дифференцируемые функции. Легко проверить, что функция вида (9) удовлетворяет уравнению (8).

Итак, решение (9) уравнения (8) второго порядка содержит уже две произвольные функции. Такое решение называется **общим.**

Приведенные уравнения дают основание сделать заключение: общее решение уравнения первого порядка в частных производных содержит одну произвольную функцию, а общее решение уравнения второго порядка – две произвольные функции.

ПРИМЕР 1. Выяснить, являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями в частных производных:

а) $U_{xx}^2 + U_{yy}^2 - \left(U_{xx} - U_{yy}\right)^2 = 0$,

б) $\sin\left(U_{xy} - U_{yy}\right) - \sin U_{xy} \cdot \cos U_x - \sin U_x \cdot \cos U_{xy} + 2U = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение а)

$$U_{xx}^2 + U_{yy}^2 - U_{xx}^2 + 2 \cdot U_{xx} U_{yy} - U_{yy}^2 = 2 \cdot U_{xx} U_{yy} = 0.$$

Данное уравнение является уравнением в частных производных, так как в него входят частные производные второго порядка

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Уравнение б) не является уравнением в частных производных, так как в него входит только функция $U = U(x, y)$. Действительно, раскрывая $\sin\left(U_{xy} - U_{yy}\right)$, получим

$$\sin U_{xy} \cdot \cos U_x + \sin U_x \cdot \cos U_{xy} - \sin U_{xy} \cdot \cos U_x -$$
$$- \sin U_x \cdot \cos U_{xy} + 2U = 0 \Rightarrow 2U = 0 \Rightarrow U(x, y) = 0.$$

ПРИМЕР 2. Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными (однородными или неоднородными) и какие нелинейными:

а) $3U_{xy} - 6U_{xx} + 7U_y - U_x + 8x = 0$,

б) $U_x U_{xy}^2 + 2x U \cdot U_{xy} - 3xy U_y - U = 0$,

в) $x^2 y \cdot U_{xxy} + 2e^x y^2 U_{xy} - \left(x^2 y^2 + 1\right) U_{xx} - 2U = 0$.

Решение. Сравнивая данные уравнения с формой (1.4), заключаем, что

- уравнение а) есть неоднородное линейное уравнение второго порядка, для которого $A=-6,\ 2B=3,\ C=0,\ D=-1,\ E=7, F=0,\ f=-8x$;

- уравнение б) нелинейное, так как оно не является линейным относительно старших частных производных;

- уравнение в) является однородным линейным уравнением третьего порядка.

2. Линейные дифференциальные уравнения. второго порядка и свойства их решений

Многие задачи физики, механики и техники приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, причем линейных относительно искомой функции и ее частных производных.

Общий вид **линейного дифференциального уравнения второго порядка** при условии, что функция u зависит от двух переменных x и y, таков:

$$\begin{aligned} &A(x,y)U_{xx}+2B(x,y)U_{xy}+C(x,y)U_{yy}+D(x,y)U_x+\\ &+E(x,y)U_y+F(x,y)U=f(x,y), \end{aligned} \tag{10}$$

где A, B, C, D, E, F, f - данные непрерывные функции, определяемые в некоторой области G переменных x и y, причем A, B, C имеют непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.

Чаще всего коэффициенты перед искомой функцией $u(x,y)$ и ее производными – числа.

Если в уравнении (10) $f(x,y)\equiv 0$, то уравнение называется **однородным**; если $f(x,y)\neq 0$, то уравнение называется **неоднородным.**

Обсудим особенность решений однородного уравнения

$$AU_{xx}+2BU_{xy}+CU_{yy}+DU_x+EU_y+F\cdot U=0. \tag{11}$$

Решения линейных однородных уравнений вида (11) обладают следующим свойством.

Если каждая из функций $U_1(x,y), U_2(x,y),\dots,U_k(x,y)$ является решением уравнения (11), то и их линейная комбинация

$$C_1u_1(x,y)+C_2u_2(x,y)+\dots+C_ku_k(x,y), \tag{12}$$

где $C_1, C_2, ..., C_k$ - произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Такое же свойство, как известно, имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений, но $n-$го порядка.

Уравнение же в частных производных может иметь бесконечное множество линейно независимых частных решений, т.е. такое множество решений, любое конечное число которых является функциями линейно независимыми. (Напомним, система функций $U_1(x,y), ..., U_n(x,y)$ называется **линейно независимой**, если ни одна из этих функций не является линейной комбинацией остальных). В соответствии с этим имеют дело с рядами, членами которых служат произведения произвольных постоянных на частные решения:

$$C_1U_1(x,y) + C_2\,U_2(x,y) + ... + C_n\,U_n(x,y) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(x,y). \qquad (13)$$

Будем рассматривать только такие ряды, суммы которых есть непрерывные функции

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,y).$$

Кроме того, будем предполагать, что эти ряды можно дважды почленно дифференцировать. При таких предположениях функция $u(x,y)$, которая есть сумма ряда (13), так же как и члены ряда, является решением уравнения (11).

3. Классификация линейных уравнений и приведение их к каноническому виду

Линейные уравнения второго порядка в частных производных делят на три класса, в каждом из которых есть простейшие уравнения, называемые каноническими. Решения уравнений одного и того же класса имеют много общих свойств. Для изучения этих свойств достаточно рассмотреть канонические уравнения, так как другие уравнения данного типа могут быть приведены к каноническому виду.

Запишем линейное относительно производных второго порядка уравнение (10) в более краткой форме:

$$AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} + F_1(x, y, U, U_x, U_y) = 0. \qquad (14)$$

Классификация уравнений вида (14) проводится в соответствии со знаком дискриминанта $\Delta = B^2 - AC$.

Если в некоторой области $G_1 \subset G$ выражение $B^2 - AC$ сохраняет знак, то уравнение (14) в этой области принадлежит:

а) к гиперболическому типу, если $B^2 - AC > 0$;

б) параболическому типу, если $B^2 - AC = 0$;

в) эллиптическому типу, если $B^2 - AC < 0$.

ПРИМЕР 3. Определить тип уравнения

$$y^2 U_{xx} + xyU_{xy} + x^2 U_{yy} = 0.$$

<u>Решение.</u> Здесь $A = y^2$, $B = xy$, $C = x^2$ и $B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$ для любых x и y. Значит, на всей плоскости, а следовательно и в некоторой области задания, данное уравнение является уравнением параболического типа.

Если уравнение рассматривается в области задания G, то указанные три типа не всегда дают исчерпывающую классификацию, так как выражение $B^2 - AC$ может не сохранять знак во всей области. Тогда должна существовать кривая L, вдоль которой выражение $B^2 - AC = 0$; эта кривая называется **линией параболического вырождения.** При этом возможны два случая:

1) во всех точках G, кроме L, $B^2 - AC$ сохраняет знак, тогда уравнение (14) называется уравнением гиперболического или эллиптического типа с линией вырождения L;
2) выражение $B^2 - AC$ меняет знак в области G, тогда уравнение (14) называется уравнением смешанного типа.

ПРИМЕР 4. Определить тип уравнения

$$\left(1 - x^2\right)U_{xx} - 2xyU_{xy} - \left(1 + y^2\right)U_{yy} - 2xU_x - 2yU_y = 0.$$

<u>Решение</u>. Здесь $A = 1 - x^2$, $B = -xy$, $C = -\left(1 + y^2\right)$ и, следовательно, $\Delta = B^2 - AC = x^2y^2 + \left(1 - x^2\right)\left(1 + y^2\right) = 1 - x^2 + y^2$. Дискриминант Δ равен нулю, когда $1 - x^2 + y^2 = 0$. Значит, гипербола $x^2 - y^2 = 1$ является линией параболического вырождения, а данное уравнение относится к смешанному типу, причем области G_1, где $\Delta > 0$ $\left(x^2 - y^2 < 1\right)$, и G_2, где $\Delta < 0$ $\left(x^2 - y^2 > 1\right)$, являются областями гиперболичности и эллиптичности.

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{15}$$

называется **каноническим уравнением гиперболического типа.**

Второй канонический вид уравнения гиперболического типа таков:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right). \tag{16}$$

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{17}$$

называется **каноническим уравнением параболического типа.**

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{18}$$

называется **каноническим уравнением эллиптического типа.**

Уравнение (14) в каждой из областей, где сохраняется знак дискриминанта Δ, может быть приведено к уравнению, эквивалентному данному, а именно к каноническому, путем введения вместо x и y новых переменных ξ и η с помощью зависимостей

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \tag{19}$$

При этом от функций $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ требуется, чтобы они были дважды непрерывно дифференцируемыми и чтобы якобиан D, т.е. функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

в рассматриваемой области G. Выражая производные, входящие в уравнение (14), по старым переменным через производные по новым переменным, приходят к уравнению

$$\begin{gathered} \overline{A}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \\ + \overline{F}_1\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\overline{A}(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\overline{B}(\xi,\eta)=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$\overline{C}(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что

$$\overline{B}^2-\overline{A}\cdot\overline{C}=\left(B^2-AC\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2.$$

Из последнего соотношения следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, если только якобиан $D=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$ отличен от нуля.

В преобразовании (19) две функции $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий: 1) $\overline{A}=0,\ \overline{C}=0$, 2) $\overline{A}=0,\ \overline{B}=0$, 3) $\overline{A}=\overline{C},\ \overline{B}=0$. Другими словами, функции $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ подбираются такими, чтобы в уравнении гиперболического типа исчезли члены с производными u_{xx}, u_{yy}, в уравнении параболического типа исчезли члены с производными u_{xx}, u_{xy}, в уравнении эллиптического типа - u_{xy}. Тогда, очевидно, преобразованное уравнение (20) примет наиболее простой вид – канонический.

Обоснование процедуры канонизации уравнения вида (14) мы не приводим; читатель может познакомиться с ним в книгах [1,3]. Здесь же излагается формальная сторона этой процедуры.

Для приведения уравнения (14) к каноническому виду надо составить вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0, \tag{21}$$

которое называется **характеристическим** для данного уравнения (14).

Характеристическое уравнение (21) распадается на два уравнения:

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0 \ \ \left(\text{или } \frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\right), \tag{22}$$

$$Ady-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0 \ \ \left(\text{или } \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}\right). \tag{23}$$

Общие интегралы уравнений (22) и (23)

$$\varphi(x, y) = C_1 \text{ и } \psi(x, y) = C_2$$

называют **характеристиками** данного уравнения (14) или характеристическими кривыми. (В связи с этим рассматриваемый метод упрощения уравнения (14) называют **методом характеристик**).

Через каждую точку области G, где уравнение имеет один и тот же тип, проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа – комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

СЛУЧАЙ 1. Для уравнений гиперболического типа $B^2 - AC > 0$ и правые части уравнений (22) и (23) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ определяют два различных семейства действительных кривых – характеристик уравнения (14).

В этом случае, как установлено, для приведения уравнения (14) к каноническому виду следует сделать замену переменных, положив

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi(x, y),$$

в результате чего исходное уравнение преобразуется в уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi_1\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right).$$

Таким образом, получается каноническая форма уравнения гиперболического типа.

Отметим, что с помощью дополнительной замены ($\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, где α и β - новые переменные) уравнение (14) может быть приведено к другой канонической форме:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = \overline{\Phi}_1\left(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta\right).$$

СЛУЧАЙ 2. Для уравнений параболического типа $B^2 - AC = 0$, поэтому уравнения (22), (23) совпадают и результатом их решения является один действительный интеграл $\varphi(x, y) = C$.

В этом случае для приведения уравнения (14) к каноническому виду в качестве одной из переменной, например, ξ, берут

$$\xi = \varphi(x, y),$$

другая же переменная выбирается произвольно:

$$\eta = \eta(x, y)$$

(например, $\eta = x$), лишь бы только якобиан

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 .$$

При таком выборе новых переменных ξ и η уравнение (14) принимает канонический вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \Phi_2\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right).$$

СЛУЧАЙ 3. Для уравнений эллиптического типа $B^2 - AC < 0$. В этом случае правые части уравнений (22) и (23) комплексны, а интегралы их будут комплексно-сопряженные. Они определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (22) имеет вид

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = C_1,$$

где $\varphi(x, y)$ - функция, принимающая комплексные значения, а функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ - действительные функции действительных переменных. Другой общий интеграл (уравнения (23) будет комплексно - сопряженным с указанным.

Если положить

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y),$$

то уравнение (14) принимает канонический вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \Phi_3\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right).$$

Примечание. После выбора новых переменных ξ и η требуется преобразовать производные, входящие в данное уравнение, к новым переменным. Напомним, что первые производные по старым переменным x и y выражаются через производные по новым переменным ξ и η по известным формулам дифференцирования сложной функции:

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x, \quad U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y .$$

Вторые производные находятся путем дифференцирования выражений для U_x и U_y, так как

$$U_{xx} = U(u_x)_x, \;\; U_{xy} = (U_x)_y = \left(U_y\right)_x = U_{yx}, \;\; U_{yy} = \left(U_y\right)_y;$$

при этом при отыскании $(U_x)_x$, $(U_x)_y$, $\left(U_y\right)_y$ опять применяется правило дифференцирования сложной функции.

ПРИМЕР 5. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

$$y^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Решение. Составим выражение $B^2 - AC$. В данном случае $A = y^2$, $C = -x^2$, $B = 0$, тогда $B^2 - AC = x^2y^2 \ge 0$. Отсюда следует, что данное уравнение – уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости, кроме лежащих на осях $x = 0$ и $y = 0$. Оси координат являются линиями параболичности. Следовательно, уравнение можно привести к каноническому виду (14) в каждом из координатных углов. Составим характеристическое уравнение:

$$y^2(dy)^2 - x^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$(y\,dy - x\,dx)(y\,dy + x\,dx) = 0,$$

откуда получаем $y\,dy - x\,dx = 0, \quad y\,dy + x\,dx = 0$.

Интегрируя последние уравнения, получаем

$$y^2 - x^2 = C_1 \text{ и } y^2 + x^2 = C_2.$$

Сделаем замену: $\xi = y^2 - x^2, \ \eta = x^2 + y^2$.

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot(-2x) + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot 2y + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2x\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = -2\frac{\partial U}{\partial \xi} - 2x\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] +$$

$$+2\frac{\partial U}{\partial \eta} + 2x\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] =$$

$$-2\frac{\partial U}{\partial \xi} - 2x\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(-2x) + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 2x\right] + 2\frac{\partial U}{\partial \eta} + 2x\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}(-2x) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\cdot 2x\right] =$$

$$= -4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial U}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 8y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Подставим найденные U_{xx} и U_{yy} в исходное уравнение, и после приведения подобных получим

$$\left(4x^2y^2 - 4x^2y^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 16x^2y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \left(4x^2y^2 - 4x^2y^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} -$$
$$-2\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\left(y^2 - x^2\right)\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

или $\quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{x^2 + y^2}{8x^2y^2}\dfrac{\partial U}{\partial \xi} + \dfrac{y^2 - x^2}{8x^2y^2}\dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$

Запишем теперь коэффициенты полученного уравнения в новых переменных. Из равенств $x^2 + y^2 = \eta$ и $y^2 - x^2 = \xi$ выразим $2y^2 = \eta + \xi$, $2x^2 = \eta - \xi$.

И окончательно получаем канонический вид исходного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{2\left(\eta^2 - \xi^2\right)}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\xi}{2\left(\eta^2 - \xi^2\right)}\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

ПРИМЕР 6. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Здесь $A = x^2$, $B = xy$, $C = y^2$ и $B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$. Значит данное уравнение является уравнением параболического типа всюду.

Составим характеристическое уравнение

$$x^2(dy)^2 - 2xydxdy + y^2(dx)^2 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(xdy - ydx)^2 = 0,$$

откуда получаем

$$xdy - ydx = 0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$, после интегрирования его найдем

$$\ln y - \ln x = \ln C \text{ или } \frac{y}{x} = C_1.$$

В соответствии с рассмотренным СЛУЧАЕМ 2 делаем замену переменных следующим образом:

$$\xi = \frac{y}{x}, \; \eta = y.$$

Так как функция $\eta = y$ выбиралась произвольно, то надо проверить выполнимость условия

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Найдем $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$.

Тогда

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0.$$

Выразим U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} через новые переменные ξ и η.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + 0 \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}U\right) = \frac{2y}{x^3} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= \frac{2y}{x^3} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{y^2}{x^4} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + 1 \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot 1\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot 1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Значения $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ подставим в данное уравнение:

$$\frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-2\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}-\frac{2y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-\frac{2y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+$$
$$+2\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}+y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0,$$

откуда получаем

$$y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0.$$

4. Основные уравнения математической физики

К основным уравнениям математической физики относятся следующие уравнения в частных производных второго порядка, которые являются частными случаями уравнения (10).

1. Волновое и телеграфное уравнения

Уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \tag{24}$$

где c - скорость распространения волны в данной среде, называется **волновым уравнением.**

В приведенном уравнении x, y, z обозначают декартовы координаты точки, t - время.

Для двумерного пространства (плоский случай) волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t). \tag{25}$$

В одномерной области уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t). \tag{26}$$

Волновое уравнение описывает процессы распространения упругих, звуковых, световых, электромагнитных волн, а также другие колебательные явления. Например, волновое уравнение может описать:

а) малые поперечные колебания струны (при этом под $U = U(x, t)$ понимают поперечное отклонение точки x струны от положения равновесия в момент времени t);

б) продольные колебания упругого стержня ($U -$ продольное отклонение частицы от ее положения при отсутствии деформации);

в) малые упругие колебания плоской пластины, мембраны;

г) течение жидкости или газа в коротких трубах, когда трением о стенки трубы можно пренебречь ($U -$ давление или расход).

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = A\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + B\frac{\partial U}{\partial t} + C \cdot U \qquad (27)$$

называется **телеграфным уравнением**. Оно описывает электрические колебания в проводах ($U -$ сила тока или напряжение), неустановившееся течение жидкости или газа в трубах ($U -$ давление или скорость).

Волновое и телеграфное уравнения входят в группу уравнений гиперболического типа.

2. Уравнение теплопроводности

Уравнение вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),, \qquad (28)$$

где a - параметр, учитывающий физические свойства изучаемой среды, называется **уравнением теплопроводности.**

Оно имеет вид для плоского случая

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right),, \qquad (29)$$

для одномерного

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \qquad (30)$$

Уравнением теплопроводности описываются процессы нестационарного массо- и теплообмена. В частности, к этим уравнениям приводят задачи о неустановившемся режиме распределения тепла (при этом a^2 означает коэффициент температуропроводности, а $U -$ температуру в любой точек исследуемой области в любой момент времени t), о фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, например, нефти и газа в подземных песчаниках ($a^2 = \chi -$ коэффициент пьезопроводности, $U -$ давление в любой точке среды), о неустановившейся диффузии ($a^2 = D -$ коэффициент диффузии, $U -$ концентрация), о течении жидкости в магистральных трубопроводах ($U -$ давление или скорость жидкости).

Если при рассмотрении этих задач окажется, что в исследуемой области функционируют внутренние источники и стоки массы или тепла, то процесс описывается неоднородным уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f(x, y, z, t) = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \tag{31}$$

где функция $f(x, y, z, t)$ характеризует интенсивность функционирующих источников.

Уравнения (28)…(31) являются простейшими уравнениями параболического типа.

3. Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z) \tag{32}$$

называется **уравнением Пуассона** в трехмерном пространстве. Если в этом уравнении $f(x, y, z) \equiv 0$, то оно называется **уравнением Лапласа:**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{33}$$

Если ввести оператор $\Delta u = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, называемый **оператором Лапласа**, то уравнения (32) и (33) запишутся соответственно

$$\Delta u = f(x, y, z) \qquad \text{и} \qquad \Delta U = 0.$$

К исследованию уравнений Лапласа и Пуассона приводит рассмотрение задач о стационарном процессе: это задачи гидродинамики, диффузии, фильтрации, распределения температуры, электростатики и др.

Эти уравнения относятся к уравнениям эллиптического типа.

Те задачи, которые приводят к уравнениям, содержащим время, называются **динамическими** или **нестационарными** задачами математической физики; задачи, приводящие к уравнениям, не содержащим время, называются **стационарными** или **статическими.**

5. О постановке задачи математической физики и ее корректности

Как было показано, уравнения математической физики имеют бесчисленное множество решений, зависящее от двух произвольных функций (речь идет об уравнениях второго порядка для функции двух переменных). Для того, чтобы из множества решений выделить определенное, характеризующее процесс, необходимо на искомую функцию наложить дополнительные условия, которые диктуются физическими соображениями. Тут можно провести аналогию с обыкновенными дифференциальными уравнениями, когда для выделения из общего решения частного, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, отыскивались по этим условиям произвольные постоянные. Таковыми условиями для уравнений в частных производных являются, чаще всего, начальные и граничные условия. **Граничные условия** – это условия, заданные на границе рассматриваемой среды; **начальные условия** – условия, относящиеся к какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Дополнительные условия, так же как и само дифференциальное уравнение, должны вводиться на основе физических соображений, связанных с самим процессом. Вместе с тем дополнительные условия должны быть такими, чтобы обеспечить выделение из всего множества решений единственного решения. Число граничных и начальных условий определяется типом уравнения, а их вид – заданным исходным состоянием на границе объекта и внешней среды. Для рассматриваемых нами уравнений число начальных условий равно порядку старшей производной по времени, входящей в уравнение, а число граничных условий – порядку старшей производной по координате.

Совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий представляет собой математическую формулировку физической задачи и называется задачей математической физики.

Физическая задача решается по схеме:

1) реальный физический процесс (явление, объект) заменяется некоторым идеальным процессом (явлением, объектом) так, что последний значительно проще первого и вместе с тем сохраняет его основные черты (идеализация процесса);
2) выбирается величина (функция), характеризующая процесс, и используются законы, по которым он происходит;
3) на основании выбранных законов выводится дифференциальное уравнение для величины, характеризующей процесс;
4) выводятся дополнительные условия – начальные и граничные – также в соответствии с выбранными законами.

Итак, задача математической физики состоит в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, скажем, граничным и начальным.

Задача математической физики считается поставленной корректно, если решение задачи, удовлетворяющее всем ее условиям, существует, единственно и устойчиво; последнее означает, что малые изменения любого из данных задачи вызывают малое изменение решения. Требование устойчивости необходимо по следующей причине. В данных любой конкретной задачи, особенно если они получены из опыта, всегда содержится некоторая погрешность, и нужно, чтобы малая погрешность в исходных данных приводила к малой неточности в решении. Это требование выражает физическую определенность поставленной задачи.

6. Уравнения гиперболического типа. Вывод уравнения колебания струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Если струну вывести из положения равновесия (например, оттянуть ее или ударить по ней), то струна начнет колебаться.

Будем рассматривать только поперечные колебания, т.е. такие, когда движение всех точек струны происходит в одной плоскости и в направлении, перпендикулярном положению равновесия. Если положение равновесия принять за ось Ox, то процесс будет характеризоваться одной скалярной величиной $U = U(x,t)$ - отклонением от положения равновесия точки струны x в момент времени t. Поэтому, чтобы знать положение любой точки x струны в произвольный момент времени t, нужно найти зависимость u от x и t, т.е. найти функцию $U = U(x,t)$.

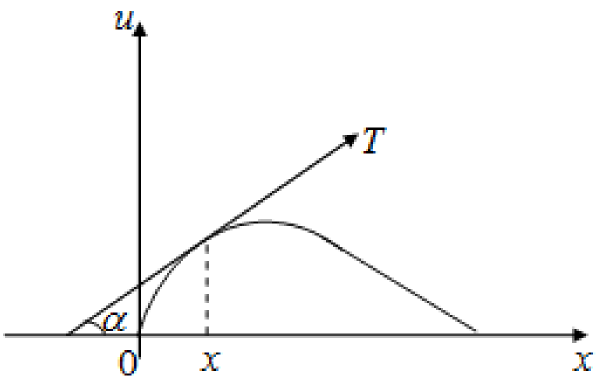

Рис. 1.

При каждом фиксированном значении t график функции $U = U(x,t)$ представляет форму струны в этот момент времени. Частная производная $\frac{\partial U}{\partial x} = U_x(x,t)$ дает при этом угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x (рис. 1). При постоянном значении x функция $U = U(x,t)$ дает закон движения точки с абсциссой x вдоль прямой, параллельной оси Ou, производная $\frac{\partial U}{\partial t} = U'_x(x,t)$ - скорость этого движения, а вторая производная $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ - ускорение. Задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция $U = U(x, t)$.

Для решения данной задачи сделаем несколько предположений.

А. Будем считать струну абсолютно гибкой, т.е. не сопротивляющейся изгибу; это означает, что если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от какой-либо ее точки, то сила натяжения T, заменяющая действие удаленной части, всегда будет направлена по касательной к струне (рис. 1.2).

Б. Струна упругая, вследствие чего возникают лишь силы натяжения, которые подчинены закону Гука: натяжение струны пропорционально ее удлинению.

В. Пренебрегаем толщиной струны, т.е. считаем ее нитью.

Г. На струну в плоскости колебания действуют силы, параллельные оси Ou, которые могут меняться вдоль струны со временем. Будем считать, что эти силы непрерывно распределены вдоль струны. Величину силы, направленной вверх, условимся считать положительной, а вниз – отрицательной. Плотность распределения этих сил обозначим через $g(x, t)$. Если единственной внешней силой является вес струны, то $g(x, t) = -\rho g$, где ρ - плотность струны, а g - ускорение силы тяжести. Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, пренебрегаем.

Д. Будем рассматривать только малые колебания струны. Математически это означает, что отклонения $U = U(x, t)$ малы и, следовательно, угловой коэффициент струны $U'_x(x, t) = \mathrm{tg}\alpha$ (угол $\alpha = \alpha(x, t)$) в любой момент времени t столь мал, что квадратом углового коэффициента $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ можно пренебречь в сравнении с единицей).

Е. Величину силы натяжения T можно считать постоянной, не зависящей ни от точки x ее приложения, ни от времени t.

Тогда уравнение колебаний струны примет вид (34)

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x, t). \tag{34}$$

Если струна однородная, т.е. $\rho = \mathrm{const}$, то уравнение (34) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{35}$$

где $a=\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$, $f(x,t)=\dfrac{1}{\rho}g(x,t)$.

Неоднородное уравнение (35) называется уравнением **вынужденных колебаний** струны; если $f(x,t)\equiv 0$, т.е. внешняя сила отсутствует, то уравнение (35) становится однородным:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \qquad (36)$$

Уравнение (36) описывает свободные колебания струны без воздействия внешних усилий.

Уравнение (35) – одно из простейших уравнений гиперболического типа и в то же время одно из важнейших дифференциальных уравнений математической физики. К нему сводится не только рассмотренная задача, но и многие другие.

7. Формулировка краевых задач. Граничные и начальные условия

Одного уравнения движения (34) при математическом описании физического процесса недостаточно. Надо сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса. При рассмотрении задачи о колебании струны дополнительные условия могут быть двух видов: начальные и граничные (краевые).

Сформулируем дополнительные условия для струны с закрепленными концами. Так как концы струны длины ℓ закреплены, то их отклонения $U(x,t)$ в точках $x=0$ и $x=\ell$ должны быть равны нулю при любых t:

$$U(0,t)=0,\quad U(\ell,t)=0$$

или

$$U\big|_{x=0}=0,\qquad U\big|_{x=\ell}=0. \qquad (37)$$

Условия (37) называются **граничными** условиями; они показывают, что происходит на концах струны на протяжении процесса колебания.

Очевидно, процесс колебаний будет зависеть от того, каким способом струна выводится из состояния равновесия. Удобнее считать, что струна начала колебаться в момент времени $t=0$. В начальный момент времени $(t=0)$ всем точкам струны сообщаются некоторые смещения и скорости:

$$U(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x)$$

или

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \tag{38}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

Условия (38) называются **начальными** условиями.

Итак, физическая задача о колебаниях струны свелась к следующей математической задаче: найти такое решение уравнения (34) (или (35) или (36)), которое удовлетворяло бы граничным условиям (37) и начальным условиям (38). Эта задача называется смешанной краевой задачей, так как включает в себя и граничные и начальные условия. Доказано, что при некоторых ограничениях, наложенных на функции $f(x)$ и $F(x)$, смешанная задача имеет единственное решение.

Оказывается, что к задаче (34), (37), (38), помимо задачи о колебаниях струны, сводятся многие другие физические задачи: продольные колебания упругого стержня, крутильные колебания вала, колебания жидкостей и газа в трубе и др.

Помимо граничных условий (37) возможны граничные условия других типов. Наиболее распространенными являются следующие:

I $\quad U\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad U\big|_{x=\ell} = \mu_2(t)$

II $\quad \dfrac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \dfrac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=\ell} = \nu_2(t)$

III $\quad \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + h_1 U\right)\bigg|_{x=0} = \omega_1(t), \quad \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + h_2 U\right)\bigg|_{x=\ell} = \omega_2(t),$

где $\mu_1(t), \mu_2(t), \nu_1(t), \nu_2(t), \omega_1(t), \omega_2(t) -$ известные функции,

h_1 и h_2 $-$ известные постоянные.

Приведенные граничные условия называют соответственно граничными условиями первого, второго, третьего рода. Условия I имеют место в том случае, если концы объекта (струна, стержень и т.д.) перемещаются по заданному закону; условия II – в случае, если к концам приложены заданные силы; условия III – в случае упругого закрепления концов.

Если функции, заданные в правой части равенств, равны нулю, то граничные условия называются **однородными.** Так, граничные условия (37) – однородные.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, получим шесть типов простейших краевых задач.

Для уравнения (34) может быть поставлена и другая задача. Пусть струна достаточно длинная и нас интересует колебание ее точек, достаточно удаленных от концов, причем в течение малого промежутка времени. В этом случае режим на концах не будет оказывать существенного влияния и поэтому его не учитывают; струну же при этом считают бесконечной. Вместо полной задачи ставят предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области: найти решение уравнения (34) для $-\infty < x < \infty$ при $t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$U(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x).$$

Эту задачу называют **задачей Коши.**

Если изучается процесс вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то мы приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \le x < \infty$. В этом случае задаются начальные условия и одно из граничных условий I-III при $x = 0$.

8. Колебания однородной бесконечной струны. Формула Даламбера

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа начнем с более простой задачи – задачи о свободных колебаниях однородной бесконечной струны. Это задача, как было показано в п. 1.24, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{39}$$

при начальных условиях

$$U(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{40}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси. Никакие граничные условия на искомую функцию $U(x,t)$ не накладываются. Такая задача называется задачей с начальными условиями или **задачей Коши.**

Тогда решение дифференциального уравнения имеет вид

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \tag{41}$$

Формулу (41) называют **формулой Даламбера.**

9. Задача Коши для полубесконечной струны

Метод решения задачи Коши для бесконечной струны легко применить к случаю полубесконечной струны. Пусть струна находится в состоянии покоя на положительной оси Ox и ее конец, совпадающий с началом координат, неподвижно закреплен. Тогда к уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{42}$$

и начальным условиям

$$U(x,0) = \varphi(x), \; U_t(x,0) = \psi(x), \tag{43}$$

заданным при $x \geq 0$, необходимо добавить еще одно граничное условие

$$U\big|_{x=0} = 0. \tag{44}$$

Из условий (43), (44) следует, что $f(0) = 0$.

Решение уравнения (42) при условиях (43), (44) может быть получено из формулы Даламбера (44) следующим образом. Допустим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные сначала только для $x \geq 0$, доопределены нами произвольным образом и для $x < 0$. Напишем выражение $u(0,t)$:

$$U(0,t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(z) dz. \tag{45}$$

Чтобы $U(0,t)$ было равно нулю при всех значениях t, нужно функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x < 0$ определить так:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x),$$

т.е. функции продолжить в область отрицательных значений нечетным образом. Тогда, очевидно, первое слагаемое формулы (45) равно нулю; второе слагаемое также обращается в нуль, потому что берется интеграл от нечетной функции в интервале, симметричном относительно начала координат. Продолжив таким образом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю числовую ось, напишем формулу Даламбера:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Теперь это выражение определено для всех точек x и t и при $x \ge 0$ дает решение поставленной задачи.

ПРИМЕР 7. Найти форму достаточно длинной струны, определяемой уравнением $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, в момент времени $t = \pi/2$, $t = \pi$, если заданы начальные смещения и скорости:

а) $U(x,0) = \sin x, \quad U_t(x,0) = \cos x;$

б) $U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = \cos x;$

в) $U(x,0) = \sin x, \quad U_t(x,0) = 0.$

<u>Решение.</u> По постановке вопроса надо найти решение $U(x,t)$ задачи Коши в области: $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Оно определяется формулой Даламбера.

СЛУЧАЙ а). Полагая в формуле Даламбера $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$, найдем смещение $U(x,t)$ в любой точке и любой момент t:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos z \, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t)\right] + \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) - \sin(x-t)\right] = \sin(x+t).$$

Откуда определяем форму кривой в указанные моменты времени:

$$U(x, \pi/2) = \cos x, \quad U(x, \pi) = -\sin x.$$

Кривые изображены на рис. 2.

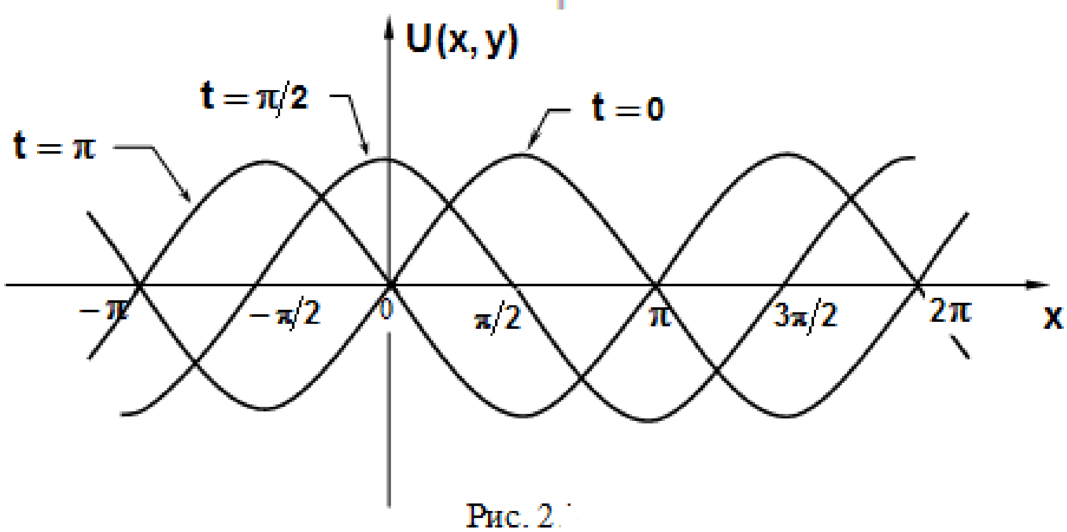

Рис. 2.

СЛУЧАЙ б) Начальные смещения струны равны нулю, т.к. $U(x,0) = 0$. При $\varphi(x) = 0$ колебательный процесс будет описан по формуле

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{x-t}^{x+t}\cos z\ dz=\frac{1}{2}\cdot\sin z\Big|_{x-t}^{x+t}=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x+t)-\sin(x-t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{x+t+x-t}{2}\cdot\sin\frac{x+t-x+t}{2}=\cos x\cdot\sin t.$$

В момент времени $t=\pi/2$ струна имеет форму косинусоиды: $U\big|_{t=\pi/2}=\cos x$, а в момент $t=\pi$ она совпадает с осью абсцисс: $U\big|_{t=\pi}=0$.

СЛУЧАЙ в). По условию, начальные скорости равны нулю, значит, $\psi(x)=0$. Тогда имеем

$$U(x,t)=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x-t+x+t}{2}\cos\frac{x-t-x-t}{2}=$$
$$=\sin x\cdot\cos t.$$

Форма струны в указанные моменты времени определяется уравнениями:

$$U(x,\ \pi/2)=0,\quad U(x,\ \pi)=-\sin x.$$

10. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Метод Фурье или метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений в частных производных. Изложение этого метода мы проведем для задачи о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах. Эта задача, сводится к решению однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{46}$$

при однородных граничных условиях

$$U(0,t)=0,\quad U(\ell,t)=0 \tag{47}$$

и начальных условиях

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\psi(x),\quad (0\le x\le \ell). \tag{48}$$

Общим решением уравнения будет ряд

$$U\ (x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{\ell}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{\ell}t\right)\sin\frac{k\pi}{\ell}x. \tag{49}$$

где a_n и b_n - коэффициенты Фурье, которые вычисляются по известным формулам:

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx, \qquad (50)$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx. \qquad (51)$$

ПРИМЕР 8. Найти закон колебания однородной струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = \ell$. В начальный момент струна оттянута в точке x_0 на высоту h (рис. 3) и затем отпущена без начальной скорости.

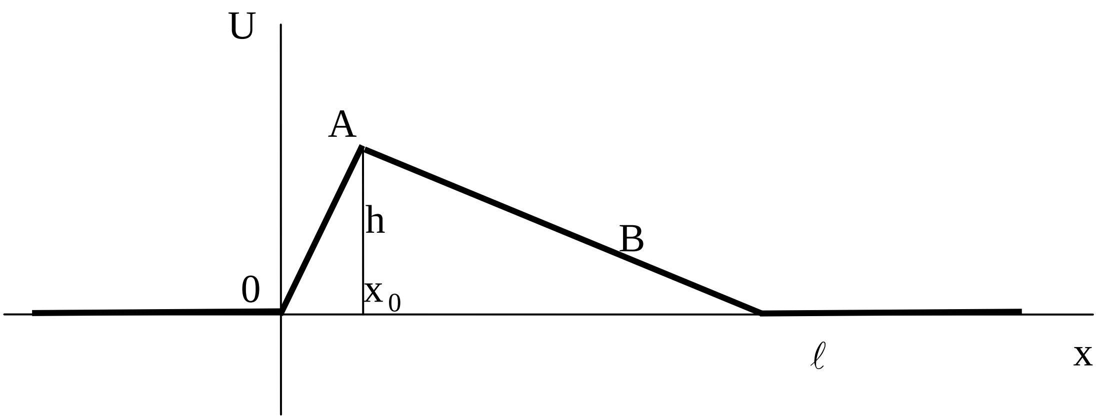

Рис. 3

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$U_{tt} = a^2 \cdot U_{xx}$$

при граничных условиях $U(0,t) = U(0,x) = 0$ и начальных условиях

$$U(0,x) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}, & 0 < x \le x_0 \\ \dfrac{h(\ell - x)}{\ell - x_0}, & x_0 < x \le \ell \end{cases} \qquad U_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x \le \ell,$$

где $\frac{h}{x_0}\cdot x = U$ - уравнение прямой ОА, $\frac{h(\ell - x)}{\ell - x_0} = U$ – уравнение прямой АВ (оба записываются как уравнение прямой с угловым коэффициентом).

Решение поставленной задачи определяется рядом (2.88)

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{a\pi}{\ell}t+b_k\cdot\sin\frac{a\pi}{\ell}t\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x,$$

где a_k, b_k - коэффициенты Фурье для функций, которые вычисляются по формулам (50), (51).

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx,\quad \text{где } \varphi(x)=U(x,0).$$

В нашем случае

$$a_k=\frac{2}{\ell}\left[\int_0^{x_o}\frac{h}{x_o}\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx+\int_{x_o}^{\ell}\frac{h(\ell-x)}{\ell-x_o}\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx\right].$$

Вычислим первый интеграл

$$\frac{h}{x_o}\int_0^{x_o}x\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx=\left|\begin{matrix}x=u, & \sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx=dv\\ dx=du, & v=-\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{\ell}x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{h}{x_o}\left[-\frac{x\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{\ell}x\Big|_0^{x_o}+\frac{\ell}{k\pi}\int_{x_o}^{x_o}\cos\frac{k\pi}{\ell}x\,dx\right]=$$

$$=-\frac{h\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{\ell}x_0+\frac{h\ell}{x_o k\pi}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x_0\Big|_0^{x_o}=$$

$$=-\frac{h\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{\ell}x_0+\frac{h\ell^2}{x_o(k\pi)^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x_0.$$

Вычислим второй интеграл

$$\int_{x_o}^{\ell}\frac{h(\ell-x)}{\ell-x_o}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=\frac{h}{\ell-x_o}\int_{x_o}^{\ell}(\ell-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\ell-x=u, & \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=dv\\ du=-dx, & v=-\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{h}{\ell-x_o}\left[\frac{\ell\cdot(\ell-x)}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_{x_o}^{\ell}-\frac{\ell}{k\pi}\int_{x_o}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx\right]=$$

$$= \frac{h\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x_0}{\ell} - \frac{h\ell}{k\pi(\ell - x_o)}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_{x_o}^{\ell} =$$

$$= \frac{h\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x_0}{\ell} + \frac{h\ell^2}{(k\pi)^2(\ell - x_o)}\cdot\sin\frac{k\pi x_0}{\ell}.$$

Тогда

$$a_k = \frac{2}{\ell}\left[-\frac{h\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x_o}{\ell} + \frac{h\ell^2}{x_o(k\pi)^2}\cdot\sin\frac{k\pi x_o}{\ell} + \right.$$

$$\left. + \frac{h\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x_o}{\ell} + \frac{h\ell^2}{(k\pi)^2(\ell - x_o)}\cdot\sin\frac{k\pi x_o}{\ell}\right] =$$

$$= \frac{2}{\ell}\cdot\frac{h\ell^2}{(k\pi)^2}\cdot\left(\frac{1}{x_o} + \frac{1}{\ell - x_o}\right)\cdot\sin\frac{k\pi x_o}{\ell} = \frac{2h\ell^2}{x_o(\ell - x_o)(k\pi)^2}\cdot\sin\frac{k\pi x_o}{\ell}.$$

Определим b_k.

$$b_k = \frac{2}{a k\pi}\int_0^{\ell}\psi(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx, \quad \text{где} \quad \psi(x) = \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}.$$

В нашем случае $\psi(x) = 0$, тогда $b_k = 0$ и решение $U(x,t)$ имеет вид

$$U(x,t) = \frac{2h\ell^2}{\pi^2 x_o(\ell - x_o)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi x_o}{\ell}\cdot\cos\frac{a\pi}{\ell}t\cdot\text{cin}\frac{k\pi}{\ell}x\ .$$

Полученный ряд описывает колебательный процесс: смещение $U(x,t)$ точки x струны в любой момент времени t. Чтобы определить форму струны в момент t_0, надо протабулировать функцию $U(x,t_0)$, ограничившись несколькими значениями.

11. Решение смешанной краевой задачи для неоднородного гиперболического уравнения при нулевых граничных условиях

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $P(x,t)$. Математически задача заключается в решении неоднородного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x,t) \quad \left(g = \frac{P}{\rho}\right) \qquad (52)$$

при однородных граничных условиях

$$U\big|_{x=0} = 0, \; U\big|_{x=\ell} = 0 \tag{53}$$

и начальных условиях

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad (0 \le x \le \ell). \tag{54}$$

Решение задачи (52)…(54) выражается в виде ряда

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi at}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{55}$$

где коэффициенты $T_n(t)$ определяются по формулам

$$T_n(t) = \frac{2}{\ell K_n}\int_0^t d\tau \int_0^\ell g(\xi,\tau)\sin K_n(t-\tau)\cdot \sin\frac{n\pi\xi}{\ell}d\xi \tag{56}$$

а a_n и b_n - по формулам (50) и (51).

12. Решение неоднородного гиперболического уравнения при неоднородных граничных условиях. (Общая первая краевая задача)

Рассмотрим вынужденные колебания ограниченной струны под действием внешней силы, причем концы ее не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x,t) \tag{56}$$

с граничными условиями

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(\ell,t) = \mu_2(t) \tag{57}$$

и начальными условиями

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad (0 \le x \le \ell) \tag{58}$$

Сформулированная задача (56)…(58) называется **общей краевой задачей** для уравнения колебаний. К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (57) неоднородны. Но эта задача может быть сведена к задаче с нулевыми граничными условиями.

Решение задачи (56)…(58) будет иметь вид

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t). \tag{59}$$

где

$$W(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]. \qquad (60)$$

Откуда получаем, что

$$W(0,t)=\mu_1(t), \quad W(\ell,t)=\mu_2(t). \qquad (61)$$

Функция $V(x,t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+g_1(x,t), \qquad (62)$$

где

$$g_1(x,t)=g(x,t)-\mu_1''(t)-\left[\mu_2''(t)-\mu_1''(t)\right]\frac{x}{\ell}, \qquad (63)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$V(0,t)=0, \quad V(\ell,t)=0 \qquad (64)$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} V(x,0)&=\varphi(x)-\left(\mu_1(0)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(0)-\mu_1(0)\right]\right),\\ \frac{\partial V(x,0)}{\partial t}&=\psi(x)-\left(\mu_1'(0)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2'(0)-\mu_1'(0)\right]\right). \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Метод решения задачи (62), (64),(65) изложен в п. 11.

13. Уравнения параболического типа. Уравнения теплопроводности (одномерный случай)

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. К этим уравнениям приводятся также задачи о движении вязкой жидкости, например, нефти.

Обсудим процесс распространения тепла в неравномерно нагретом твердом теле. Если тело нагрето неравномерно, то в нем происходит передача тепла из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой. Процесс может быть описан функцией $U=U(x,y,z,t)$, дающей температуру u в каждой точке $M(x,y,z)$ тела и в любой момент времени t. Примем следующую модель процесса: происходит механический перенос тепла от более нагретых частей тела к менее нагретым; все тепло идет на изменение температуры тела; свойства тела от температуры не зависят. Идеализация явления состоит в том, что мы будем изучать процесс, не касаясь его молекулярной природы, а также иных проявлений. Опишем процесс математически для одномерного тела.

Рассмотрим однородный стержень длины ℓ, теплоизолированный с боков (через поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой) и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Расположим ось Ox так, чтобы один конец стержня совпадал с точкой $x = 0$, а другой - с точкой $x = \ell$ (рис. 4).

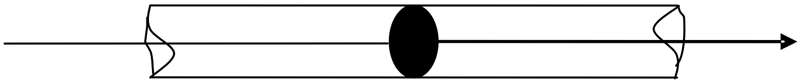

Рис. 4.

Тогда дифференциальное уравнение распространения тепла в однородном стержне имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{66}$$

. Уравнение (66) называют уравнением теплопроводности, в котором постоянную a^2 называют *коэффициентом температуропроводности*. Коэффициент a^2 имеет размерность м^2/с. Уравнение (66) является *линейным неоднородным уравнением параболического типа*.

Процесс распределения температуры $U = U(x, y, z, t)$ в изотропном теле описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t), \tag{67}$$

которое кратко записывается так:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + f(x,y,z,t), \tag{68}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Уравнение (68) описывает также процессы диффузии, где u - концентрация диффундирующего вещества, и другие (п 4).

Частные случаи уравнения теплопроводности

1. **Распространение тепла без тепловыделения**. Если внутри рассматриваемой области нет источников тепла, т.е. $f = 0$, то уравнение (68) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U. \tag{69}$$

Уравнение (69) называется *уравнением свободного теплообмена*.

2. **Установившийся поток тепла**. Для стационарного процесса теплообмена, т.е. когда температура в каждой точке тела не меняется со временем $\left(\frac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$, уравнение приобретает форму уравнения Пуассона:

$$\Delta U = -\rho, \tag{70}$$

где $\rho = \frac{f}{a^2}$.

3. **Установившийся поток тепла без тепловыделения**. В этом случае $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ и $f = 0$, поэтому распределение температуры подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0. \tag{71}$$

С помощью уравнения (71) можно ответить на вопрос: каково должно быть распределение температуры $U = U(x, y, z)$ внутри тела, чтобы дальнейшего теплообмена не происходило. Поясним: последнее возможно, если на границе области поддерживать постоянную температуру (различную в различных точках границы). Но это уже связано с вопросом о граничных и начальных условиях, к которому мы и переходим.

14. Начальное и граничные условия, их физическое толкование. Постановка задач

Чтобы определить температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (68). Необходимо, как следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие).

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа задается только одно, т.к. исходное уравнение содержит лишь первую производную по времени.

Граничные или краевые условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границе тела. Основными видами тепловых режимов являются следующие: I – на границе поддерживается определенная температура; II – на границу подается определенный тепловой поток; III – происходит теплообмен с внешней средой, температура которой известна. Им соответствуют граничные условия первого, второго, третьего рода.

Сформулируем прежде условия для одномерного уравнения теплопроводности.

Начальное условие состоит в задании функции $U = U(x,t)$ в начальный момент времени $(t = 0)$:

$$U(x,0) = U\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{72}$$

Выведем граничные условия в случаях I – III.

1. На концах стержня (или на одном конце) задается температура

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(\ell,t) = \mu_2(t), \tag{73}$$

где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ - функции, заданные в некотором промежутке $t_0 \le t \le T$, причем T есть промежуток времени, в течении которого изучается процесс. В частности, $\mu_1(t) = U_1 = \mathrm{const}$, $\mu_2(t) = U_2 = \mathrm{const}$, т.е. на концах поддерживается постоянная температура U_1 и U_2.

2. На одном из концов (или на обоих) задано значение производной искомой функции. Например, для сечения $x = 0$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t). \tag{74}$$

Дадим физическое толкование этому условию. Условие $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t)$ или $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\ell} = \nu_2(t)$ имеет место в случае, когда на соответствующем конце стержня задан тепловой поток, втекающий или вытекающий. В частности, если концевое сечение теплоизолировано, то $q_1(t) = 0$ или $q_2(t) = 0$, и следовательно,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \text{ или } \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0.$$

3. На одном из концов (или на обоих) задается линейное соотношение между функцией и ее производной. Например, для сечения $x = \ell$

$$\left(u + h\frac{\partial U}{\partial x}\right)\bigg|_{x=\ell} = \nu_3(t). \tag{75}$$

Условие типа (75) используется в случае процесса теплоотдачи, т.е. переноса тепла от тела к окружающей среде.

Заметим, что граничные условия, наложенные на значения функции $U(x,t)$, называют условиями первого рода. Граничные условия, наложенные на значение производной $U_x(x,t)$, называют условиями второго рода. А условия, наложенные как на значение функции $U(x,t)$, так и на значение производной $U_x(x,t)$, называют условиями третьего рода.

В случае граничных условий вида (73), (74), (75) говорят соответственно о первой, второй, третьей краевых задачах для уравнения теплопроводности.

Если процесс теплопроводности изучается в очень длинном стержне, таком что влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня оказывается весьма слабым в течение небольшого промежутка времени и определяется в основном лишь начальным распределением температуры, то тогда считают, что стержень имеет бесконечную длину и ставят задачу Коши.

ЗАДАЧА КОШИ для «бесконечного» стержня (идеализация достаточно длинного стержня) математически формулируется так: найти решение $U = U(x,t)$ уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$, $t \ge 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,0) = U\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция.

Если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальным условием. При этом стержень считают полубесконечным. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для «полубесконечного» стержня: найти решение $U = U(x,t)$ уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$, $t \ge 0$, удовлетворяющее условиям

$$U(x,0) = U\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad (0 < x < \infty),$$

$$U\big|_{x=0} = \mu(t), \quad t \ge 0,$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ - заданные функции.

Для уравнения (68) теплопроводности в пространстве V, ограниченном поверхностью S, начальное условие записывают в виде

$$U(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z),$$

а на границе S области V функция $U = U(x, y, z, t)$ должна удовлетворять одному из условий:

1) $U(x, y, z, t)\big|_S = f_1(M, t)$ (граничное условие 1-го рода);

2) $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \overline{n}}\right|_S = f_2(M, t)$ (граничное условие 2-го рода);

где $\overline{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S; в частности, если поверхность S теплоизолирована, то $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \overline{n}}\right|_S = 0$;

3) $\left.\left(\dfrac{\partial U}{\partial \overline{n}} + hU\right)\right|_S = f_3(M, t)$ (граничное условие 3-го рода).

Здесь $M(x, y, z)$ - текущая точка поверхности S.

Если распределение температуры внутри тела стационарно, то для однозначного определения функции $U(x, y, z)$ не надо задавать начальное условие, т.к. в начальный и во все последующие моменты времени распределение температуры одно и то же, а достаточно знать лишь тепловой ражим на границе S тела. Разыскание закона стационарного распределения температуры сводится к решению уравнения Пуассона (70) или уравнения Лапласа (71) по одному из граничных условий, в которых функции f_1, f_2 и f_3 не зависят от t. Задача для уравнений Пуассона и Лапласа с граничным условием $U(x, y, z)\big|_S = f_1(x, y, z)$ называется задачей Дирихле, а с условием $\left.\dfrac{\partial U(x, y, z)}{\partial \overline{n}}\right|_S = f_2(x, y, z)$ - задачей Неймана.

Доказано, что решение каждой из одномерных краевых задач первой, второй и третьей единственно в классе функций, непрерывно дифференцируемых в области $x_1 \le x \le x_2$, $t \ge 0$. Для трехмерных и двумерных краевых задач решение единственно в классе функций, удовлетворяющих условиям применимости соответственно формулы Остроградского и формулы Грина. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе функций, ограниченных во всем пространстве, единственно и устойчиво.

15. Распространение тепла в стержне конечной длины. Решение некоторых краевых задач линейной теплопроводности методом Фурье

Проведем решение общей первой краевой задачи методом Фурье. Этот метод был рассмотрен достаточно подробно при решении краевых задач для гиперболических уравнений. Схема применения его к уравнениям параболического типа остается прежней. Интересующее нас решение будет получено на основе решений вспомогательных задач – частных случаев указанной задачи.

I. Однородное уравнение теплопроводности

Пусть однородный стержень длины ℓ теплоизолирован по всей длине, причем в нем нет источников тепла. На концах этого стержня поддерживается постоянная или меняющаяся с течением времени температура. Начальное распределение температуры в стержне известно.

IA. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре

Задача состоит в отыскании решения однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (76)$$

при граничных условиях

$$U(0,t) = 0, \quad U(\ell,t) = 0 \qquad (77)$$

и начальном условии

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad (78)$$

решением задачи (76) – (78) является функция $U(x,t)$, представленная рядом

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (79)$$

коэффициенты a_n которого определяются по формуле:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \qquad (80)$$

ПРИМЕР 9. Дана тонкая однородная проволока длиной $\ell = 3$, теплоизолированная от окружающей среды. Начальная температура определена по закону $\varphi(x) = 3x - x^2$. На концах проволоки поддерживается нулевая температура. Найти распределение температуры $U(x,t)$ в проволоке. (Принять коэффициент температуропроводности a равным 4).

Решение. Искомая функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=16\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad 0<x<3,\ t>0,$$

граничным условиям

$$U(0,t)=0,\ U(3,t)=0,\ t>0$$

и начальному условию

$$U(x,0)=3x-x^2,\ 0\le x\le 3.$$

Решение сформулированной задачи – однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями определяется рядом

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$ в

котором коэффициенты Фурье a_n вычисляются по формуле

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\quad \text{где}\quad \varphi(x)=U(x,0).$$

По условию, $\ell=3,\ a=4,\ \varphi(x)=3x-x^2.$

Вычислим коэффициенты Фурье, интегрируя по частям:

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3(3x-x^2)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=3x-x^2, & dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx \\ du=(3-2x)\,dx, & v=-\frac{3}{k\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{x\cdot(3-x)\cdot 3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3+\frac{3}{n\pi}\int_0^3(3-2x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=0+\frac{3}{n\pi}\int_0^3(3-2x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left|\begin{array}{ll} u=3-2x, & dv=\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx \\ du=-2\,dx, & v=\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(3-2x)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3+\frac{6}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[0+\frac{6}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]=\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{18}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3\right]=$$

$$=-\frac{36}{n^3\pi^3}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=-\frac{36}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{36}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Тогда решение будет иметь вид

$$U(x,t)=\frac{36}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-\left(\frac{4n\pi}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Но, так как $1-(-1)^k=\begin{cases}0 & \text{при } k\text{ - четном}\\ 2 & \text{при } k\text{ - нечетном},\end{cases}$

то, положив $k=2n+1$ ($k=1$ при $n=0$), получим окончательное решение в виде

$$U(x,t)=\frac{72}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{16(2n+1)^2\pi^2 t}{9}}\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{3}x.$$

I Б. Распространение тепла в стержне, на концах которого поддерживается меняющаяся с течением времени температура

Задача сводится к решению уравнения $\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ (76) при граничных условиях

$$U(0,t)=\mu_1(t),\quad U(\ell,t)=\mu_2(t) \tag{81}$$

и начальном условии

$$U(x,0)=\varphi(x), \tag{82}$$

где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi(x)$ - заданные функции. Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям (1.201)

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{83}$$

где

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\left[C_n+\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau\right] \tag{84}$$

коэффициенты которого находятся по формуле

$$T_n(0) = C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad (85)$$

.

II. Неоднородное уравнение теплопроводности

Пусть внутри стержня имеются источники или поглотители тепла с известной плотностью распределения их. В этом случае процесс распространения тепла описывается неоднородным уравнением (66). Определим закон изменения температуры в стержне для граничных условий первого рода.

II.А. Однородная краевая задача

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$$

с нулевыми (однородными) граничными условиями

$$U(0,t) = 0, \quad U(\ell,t) = 0 \qquad (86)$$

и начальным условием

$$U(x,0) = 0. \qquad (87)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (88)$$

где

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau \qquad (89)$$

.

II.Б. Общая первая краевая задача

Наконец рассмотрим общую первую краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности, т.е. тот случай, когда начальное и граничные условия неоднородные:
найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$$

при граничных условиях

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(\ell,t) = \mu_2(t), \qquad (90)$$

и начальном условии

$$U(x,0)=\varphi(x). \qquad (91)$$

Задача сводится к задачам, рассмотренным в пп. 1.33.1Б, 1.33.2А. А именно, вводится функция вида

$$U(x,t)=V(x,t)+W(x,t), \qquad (92)$$

где функция $V(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \qquad (93)$$

граничным условиям

$$V(0,t)=\mu_1(t), \quad V(\ell,t)=\mu_2(t) \qquad (94)$$

и начальному условию

$$V(x,0)=\varphi(x), \qquad (95)$$

а функция $W(x,t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad (96)$$

граничным условиям

$$W(0,t)=0, \quad W(\ell,t)=0, \qquad (97)$$

и начальному условию

$$W(x,0)=0. \qquad (98)$$

16. Распространение тепла в бесконечном стержне. Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности методом интеграла Фурье

Рассмотрим задачу о распределении температуры в однородном неограниченном стержне, теплоизолированном по всей длине, при известном начальном (при $t=0$) распределении температуры.

Математическая постановка задачи: найти функцию $U(x,t)$, ограниченную в области $-\infty < x < \infty,\ t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \tag{99}$$

и начальному условию

$$U(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty. \tag{100}$$

Сформулированная задача есть задача Коши.

Применим метод разделения переменных и суперпозиции частных решений.

Ищем частные решения уравнения (99) в виде произведения двух функций одной переменной

$$U(x,t) = T(t)X(x). \tag{101}$$

Подставляя (101) в (99) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu,\ \mu = \mathrm{const}.$$

Откуда следует

$$T'(t) + a^2 \mu T(t) = 0, \tag{102}$$

$$X''(x) + \mu X(x) = 0. \tag{103}$$

Из уравнения (102) находим

$$T(t) = Ce^{-\mu a^2 t}. \tag{104}$$

Функции $T(t)$ и $X(x)$ должны быть ограниченными, т.к. температура $u = X(x)T(t)$ не может неограниченно возрастать в результате свободного теплообмена. Из (103) видно, что параметр разделения μ не может быть отрицательным; если $\mu < 0$, то $e^{-\mu a^2 t} \to \infty$ при $t \to \infty$, а это не имеет физического смысла. Следовательно, $\mu \geq 0$. Обозначим для удобства последующих выкладок $\mu = \lambda^2$. В выражении (104) положим $C = 1$. Тогда

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Как известно, для линейного уравнения (103) общее решение имеет вид

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается совершенно произвольным. Произвольные постоянные A и B для каждого λ имеют определенные значения. Поэтому A и B можно считать функциями от λ. Согласно (101) каждому значению λ соответствует частное решение

$$U_\lambda(x,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]. \qquad (105)$$

В случае стержня конечной длины ℓ мы определили из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ: $\lambda_n = n\frac{\pi}{\ell}$, где каждому n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n. Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\frac{\pi}{\ell}$ и стремится к нулю, когда $\ell \to \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞. Таким образом, первая часть метода – построение частных решений – завершена.

Вторая часть метода Фурье – суперпозиция частных решений $U_\lambda(x,t)$, $0 < \lambda < \infty$. Уравнение (99) линейное и однородное; оно имеет, как мы только что установили, бесчисленное множество частных решений, зависящих от непрерывно меняющегося параметра λ. Поэтому общее решение получается из частных (105) не суммированием по счетному множеству значений λ_n, а интегрированием по параметру λ:

$$U(x,t) = \int_0^\infty U_\lambda(x,t)d\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \qquad (106)$$

так, чтобы решение (106) удовлетворяло начальному условию (100). Полагая в (106) $t = 0$, получим в силу (100)

$$U(x,0) = \varphi(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \qquad (107)$$

Где функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ находятся по формулам:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cos\lambda x dx, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\sin\lambda x dx \qquad (108)$$

Подставив их в интеграл (107), получим

$$U(x,t) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\cos\lambda x\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda.$$ В

несем $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ под знак внутренних интегралов, тогда

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(\cos\lambda\xi\cdot\cos\lambda x+\sin\lambda\xi\cdot\sin\lambda x)d\xi\right]d\lambda.$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках есть косинус разности, приходим к следующему представлению:

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2a^2t}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi.$$

Последний интеграл можно еще преобразовать, изменив порядок интегрирования:

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda. \qquad (109)$$

Построенная функция $U(x,t)$ есть решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

17. Пространственная задача теплопроводности. Распространение тепла в шаре

Решение задачи теплопроводности в пространстве двух и трех измерений связано с большими трудностями математического характера. Возможности использования математического аппарата в настоящем курсе сильно ограничены. Поэтому рассмотрим краевую задачу для трехмерного пространства, решение которой можно привести к одномерному случаю.

Пусть имеем однородный шар радиуса R, центр которого находится в начале координат. Предположим, что как в начальный, так и в последующие моменты времени температура одна и та же во всех точках, находящихся на одинаковой расстоянии r от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Определим температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t>0$.

Преобразуем уравнение теплопроводности в пространстве трех координат

$$U_t=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}\right) \qquad (110)$$

к уравнению с одной пространственной координатой, т.к. температура u в точке $M(x,y,z)$ для $t>0$ по условию зависит от ее расстояния r до начала координат.

Значит,

$$U = U(r,t), \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (111)$$

Из (110) найдем

$$U_x = U_r \cdot r_x = U_r \cdot \frac{x}{r},$$

$$U_{xx} = (U_r)'_x \cdot r_x + U_r \cdot r_{xx} = U_{rr} \cdot r_x^2 + U_r \cdot r_{xx} = U_{rr}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + U_r\,\frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Аналогично определяются U_{yy}, U_{zz}. После подстановки в (110) найденных выражений для частных производных U_{xx}, U_{yy}, U_{zz} уравнение примет вид

$$U_t = a^2\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right). \qquad (112)$$

Тогда начальное условие запишется в виде

$$U(r,t) = \varphi(r), \qquad (113)$$

где $\varphi(r)$ - заданная функция в интервале $0 \le r \le R$, а граничное условие

$$U(R,t) = 0. \qquad (114)$$

Если ввести новую неизвестную функцию

$$V(r,t) = r \cdot U(r,t), \qquad (115)$$

то задача легко сводится к решенной ранее одномерной краевой задаче с однородными граничными условиями. В самом деле, из (115) найдем

$$V_t = r \cdot U_t, \quad V_r = U + r \cdot U_r, \quad V_{rr} = 2U_r + r \cdot U_{rr}.$$

Выразим отсюда u_t, u_r, u_{rr} и подставим их значения в (112). Уравнение (112) преобразуется к виду

$$V_t = a^2 V_{rr},$$

а условия для новой функции $V(r,t)$ таковы:

$$V(r,0) = r \cdot \varphi(r),$$

$$V(0,t) = 0, \; V(R,t) = 0.$$

В результате мы пришли к задаче о теплопроводности в конечном стержне длины R, на концах которого поддерживается температура, равная нулю, а начальное распределение температуры задается функцией $r\varphi(r)$. Эта задача решена в п. IA. Согласно формулам (79) и (80) имеем

$$V(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi r}{R},$$

где

$$a_n=\frac{2}{R}\int_0^R r\varphi(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr.$$

Искомая же температура $u(r,t)=\dfrac{V(r,t)}{r}$.

18. Уравнения эллиптического типа. Задачи, приводящие к уравнениям Пуассона и Лапласа

Исследование стационарных процессов различной физической природы приводит к уравнениям эллиптического типа. Простейшими и наиболее распространенными уравнениями этого типа являются уравнения Пуассона и Лапласа.

К уравнениям Пуассона и Лапласа, помимо задачи о распределении температуры в стационарном тепловом поле приводятся многие задачи из электростатики, магнитостатики, гидродинамики и других разделов естествознания. Остановимся на некоторых из них.

Основное уравнение электростатики

Пусть в некоторой однородной среде имеется стационарное, т.е. не зависящее от времени, электрическое поле, образованное электрическими зарядами. $\overline{E}$ - напряженность электрического поля; ρ - плотность зарядов; диэлектрическую постоянную среды примем равной единице.

Основным законом электростатического поля является теорема Гаусса: поток напряженности $\overline{E}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен (в абсолютной системе единиц) алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, умноженной на 4π:

$$\oiint_S E_n dS=4\pi\sum_i e_i.$$

В общем случае электрические заряды распределены по объему V с некоторой плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$. Заряд ρdV, помещенный в элементе объема dV, можно рассматривать как точечный заряд, а данное электрическое поле напряженности $\overline{E}$ - как поле, образованное наложением точечных зарядов. Поэтому сумма $\sum_i e_i$ должна быть заменена на $\iiint_V \rho dV$.

Итак, в силу основного закона

$$\oiint_S E_n dS=4\pi\iiint_V \rho dV. \tag{116}$$

Применив к поверхностному интегралу формулу Остроградского-Гаусса

$$\oiint\limits_S E_n dS = 4\pi\iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{E}\, dV,$$

из (116) получаем

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{E}\, dV = 4\pi\iiint\limits_V \rho\, dV$$

или

$$\iiint\limits_V \left(\operatorname{div}\overline{E} - 4\pi\rho\right) dV = 0.$$

Отсюда, ввиду произвольности объема V, следует, что равно нулю подынтегральное выражение. Таким образом, перешли к дифференциальной форме теоремы Гаусса

$$\operatorname{div}\overline{E} = 4\pi\rho. \tag{117}$$

Из электродинамики известно, что электростатическое поле является безвихревым, или потенциальным, т.е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$\overline{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

где φ - электрический потенциал.

В векторном анализе было установлено, что

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) \equiv \Delta\varphi.$$

С учетом этого уравнение (117) примет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{118}$$

В системе единиц СИ уравнение (118) записывается проще:

$$\Delta\varphi = -\rho.$$

Отсюда заключаем, что потенциал φ электрического поля удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет $(\rho = 0)$, то потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основное уравнение гидродинамики

Пусть внутри некоторой области T с границей S имеет место течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \mathrm{const}$), характеризуемое вектором скорости $\overline{v}$. Будем предполагать, что координаты v_x, v_y, v_z вектора $\overline{v}$ не зависят от времени t. Такое движение называют **стационарным** или **установившимся**. Как известно из векторного анализа, стационарное поле скоростей движущейся несжимаемой жидкости является соленоидальным, т.е.

$$\operatorname{div}\bar{v} = 0. \tag{119}$$

(Напомним: в силу условия несжимаемости, количество жидкости, поступающей внутрь поверхности S за единицу времени, равно количеству жидкости, удаляющейся за это время из области, ограниченной этой поверхностью. Следовательно, поток через произвольную замкнутую поверхность в этом поле равен нулю, а это означает, что дивергенция поля равна нулю во всех точках (формула Остроградского-Гаусса)).

Уравнение (119) называется уравнением движения несжимаемой жидкости. Оно еще не дает возможности определить скорость $\bar{v}$, поскольку надо знать три скалярные функции v_x, v_y, v_z, а уравнение для их определения только одно. В гидродинамике выводятся из физических соображений еще несколько уравнений и из полученной системы уравнений находятся координаты вектора $\bar{v}$. Мы не будем составлять этих уравнений; вместо этого наложим на движение дополнительное требование и тогда, в этом частном случае, нам удастся обойтись одним уравнением (119). Ограничимся рассмотрением потенциального движения жидкости. Если течение невихревое ($\operatorname{rot}\bar{v} = 0$), то скорость $\bar{v}$ есть градиент некоторой скалярной функции u, называемой **потенциалом скорости:**

$$\bar{v} = -\operatorname{grad} U.$$

Подставляя это выражение в (119), получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = 0$$

или

$$\Delta U = 0.$$

Как видим, потенциал $U(x, y, z)$ скорости течения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа.

В задачах фильтрации можно принять

$$\bar{v} = -k \operatorname{grad} P,$$

где P - давление; $k - \text{const}$. Тогда установившийся режим фильтрации описывается уравнением Лапласа относительно давления $P(x, y, z)$ пласта:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

19. Постановка основных краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона

Для решения уравнения Лапласа или Пуассона, как и вообще для решений стационарных задач, естественно, не задается начальный режим. Задаются лишь условия на границе области.

Математически задача для уравнений Лапласа (Пуассона) ставится так: найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую внутри области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, уравнению

$$\Delta U = 0 \quad (\Delta U = -f(x,y,z))$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I. $U|_S = f_1(P)$ (граничное условие 1-го рода);

II. $\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{n}}\right|_S = f_2(P)$ (граничное условие 2-го рода);

III. $\left.\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{n}} + hU\right)\right|_S = f_3(P)$ (граничное условие 3-го рода),

где f_1, f_2, f_3 - заданные непрерывные функции; $\frac{\partial U}{\partial \bar{n}}$ - производная по внешней нормали $\bar{n}$ к поверхности S; $P(x,y,z)$ - текущая точка поверхности.

Задача интегрирования уравнения Лапласа с граничным условием первого рода называется первой граничной задачей или задачей Дирихле, а с условием второго рода – второй граничной задачей или задачей Неймана. Если задана линейная комбинация неизвестной функции и ее нормальной производной, то задачу интегрирования называют третьей граничной задачей. В некоторых задачах на разных участках границы задаются условия разных типов, тогда говорят о смешанной граничной задаче.

В частности, если уравнение Лапласа описывает установившийся режим фильтрации, а функция u определяет давление в каждой точке пласта, то граничное условие первого рода означает, что в точках поверхности S задается давление (например, давление на забое скважины или на контуре питания при плоско-параллельном течении); задание граничного условия второго рода равносильно заданию потока фильтрующейся жидкости, т.е. дебита в каждой точке границы S. Граничное условие третьего рода задается, когда имеет место переток жидкости в выше – или нижележащие пласты.

Если решение ищется в области V, внутренней (или внешней) по отношению к поверхности S, то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) граничной задачей.

20. Решение краевых (граничных) задач для простейших областей методом разделения переменных

Для областей произвольной формы метод Фурье для решения уравнения Лапласа (или Пуассона) неприменим. Этот метод для уравнения Лапласа проходит лишь в случае некоторых простейших областей, где возможно разделение переменных в граничных условиях (прямоугольник, круг, кольцо, сектор, шар, цилиндр и др.) Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма-Лиувилля) приводят к различным специальным функциям. Мы рассмотрим задачи Дирихле в плоской области, при решении которых используются только тригонометрические функции (круговые и гиперболические).

Решение задачи Дирихле (внутренней и внешней) для круга. Интеграл Пуассона

Функция U называется **гармонической** в некоторой области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа в этой области.

Решим первую граничную задачу (внутреннюю и внешнюю) для круга.

Внутренняя задача Дирихле: найти функцию U, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U = 0 \tag{120}$$

внутри круга $x^2 + y^2 < a^2$, непрерывную в замкнутой области $x^2 + y^2 \le a^2$ и принимающую заданные значения на границе круга:

$$U_C = f(x, y). \tag{121}$$

Внешняя задача Дирихле: найти функцию, гармоническую в области $x^2 + y^2 > a^2$ (внешность круга), ограниченную в области $x^2 + y^2 \ge a^2$ и удовлетворяющую граничному условию (121).

Обе задачи будем решать одновременно. Задачу проще решать в полярной системе координат (ρ, φ), где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{122}$$

После замены переменных (122) уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{123}$$

. Соответственно граничное условие (122) запишется так:

$$U(\rho,\varphi)\big|_C = U(a,\varphi) = f(\varphi),\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad (124)$$

Причем $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, т.к. увеличение φ на 2π возвращает точку (ρ,φ) в исходное положение.

Согласно методу Фурье ищем решение уравнения (123) при условии (124) в виде

$$U(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \qquad (125)$$

Подставляя (125) в (123), получим

$$R''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Разделяем переменные

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda.$$

Поскольку по обе стороны знака равенства стоят функции от различных независимых переменных, то такое равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через λ. Тогда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \qquad (126)$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \qquad (127)$$

Общее решение линейного уравнения (127) есть

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi. \qquad (128)$$

При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho,\varphi)$, как и ограниченная функция $f(\varphi)$, должна вернуться к исходному значению, т.е. должно быть выполнено условие периодичности:

$$U(\rho,\varphi + 2\pi) = U(\rho,\varphi).$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(\varphi)$ является периодической с периодом 2π:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \qquad (129)$$

Решение (128) будет удовлетворять условию периодичности лишь тогда, когда $\sqrt{\lambda} = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отрицательные n можно отбросить, т.к. знак n влияет только на знак произвольной постоянной B. Значит, отрицательные n не дают новых решений.

Таким образом, собственные числа и собственные функции задачи (128), (129) есть

$$\lambda_n = n^2,\ \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{130}$$

Подставим теперь $\lambda_n = n^2$ в уравнение (126):

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - n^2 R(\rho) = 0. \tag{131}$$

Уравнение (131) называется уравнением Эйлера. Его решение ищут в виде

$$R(\rho) = \rho^{\mu}. \tag{132}$$

Подставляя (132) в (131), найдем

$$\mu(\mu-1)\rho^{\mu-2}\rho^2 + \rho\mu\rho^{\mu-1} - n^2\rho^{\mu} = 0$$

или, сокращая на ρ^{μ},

$$\mu^2 - n^2 = 0, \text{ откуда } \mu = \pm n \quad (n > 0).$$

Таким образом, для каждого значения $n\ (n > 0)$ имеется два линейно независимых решения ρ^n и ρ^{-n}, которые определяют свое общее решение $R_n(\rho)$ уравнения (131):

$$R(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}, \tag{133}$$

где C_n, D_n - постоянные. Перемножая теперь $R_n(\rho)$ и $\Phi_n(\varphi)$, согласно (125), получим дискретную совокупность функций

$$U_n(\rho,\varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right). \tag{134}$$

Для внутренней задачи Дирихле надо положить $R_n(\rho) = C_n\rho^n$, т.к. если $D_n \neq 0$, то функция (134) обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является гармонической внутри круга $\rho < a$. Для решения внешней задачи, наоборот, надо взять $R_n(\rho) = D_n\rho^{-n}$, иначе, положить $C_n = 0$, т.к. решение (134) должно быть ограниченным в области $\rho \geq a$. Тогда частными решениями уравнения (123) являются функции

$$U_n(\rho,\varphi) = \rho^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \ \text{ для } \ \rho \leq a,$$

$$U_n(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\ \text{для}\ \ \rho\ge a,$$
$$n=0,1,2,\dots.$$

(Постоянные C_n и D_n включены в A_n и B_n). В силу линейности и однородности уравнения Лапласа суммы частных решений

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\quad \rho\le a, \tag{135}$$

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\ \ \rho\ge a \tag{136}$$

также будут решением уравнения Лапласа (при условии сходимости рядов).

Подберем произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворялось условие (124)

$$U(a,\varphi)=f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\ \ 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{137}$$

Напишем ряд Фурье для периодической функции $f(\varphi)$ на отрезке $[0;\,2\pi]$:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi), \tag{138}$$

где

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos n\psi\,d\psi, \tag{139}$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin n\psi\,d\psi.$$

Сопоставляя (137) и (138), заключаем, что для выполнения граничного условия (137) нужно положить A_0, a^nA_n, a^nB_n равными коэффициентам Фурье:

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\ a^nA_n=\alpha_n,\ a^nB_n=\beta_n.$$

Следовательно, для внутренней задачи

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\ A_n=\frac{\alpha_n}{a^n},\ B_n=\frac{\beta_n}{a^n},$$

для внешней задачи

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\ A_n=\alpha_n a^n,\ B_n=\beta_n a^n.$$

Таким образом, решение внутренней задачи Дирихле для круга представим в виде ряда

$$U(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi), \tag{140}$$

а решение внешней задачи Дирихле в виде ряда

$$U(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi), \tag{141}$$

где α_0, α_n, β_n определяются как коэффициенты ряда Фурье для функции $f(\varphi)$ по формулам (139).

Установлено, что функции (140) и (141) удовлетворяют всем условиям задачи.

Преобразуем формулы (140), (141) к более простому виду. Рассмотрим подробно внутреннюю задачу, а для внешней задачи получим результат по аналогии. Преобразуем ряд (140), подставив выражения для коэффициентов Фурье (139) и произведя затем перестановку порядка суммирования и интегрирования

$$\begin{aligned}U(\rho,\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos n\psi\,d\psi\right)\cos n\varphi+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin n\psi\,d\psi\right)\sin n\varphi\right]=\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\cos n\psi\cos n\varphi+\sin n\psi\sin n\varphi)\right\}d\psi=\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\psi)\right\}d\psi.\end{aligned} \tag{142}$$

Произведем тождественные преобразования в фигурных скобках, обозначив для краткости $\frac{\rho}{a}=t$, $\varphi-\psi=\omega$; при этом воспользуемся формулой

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right),$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\psi)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\left(e^{in\omega}+e^{-in\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(te^{i\omega}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(te^{-i\omega}\right)^n\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(te^{i\omega}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q}$ является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{\rho}{a}e^{i(\varphi-\psi)}$, модуль которого $|q|=\frac{\rho}{a}<1$. В силу этого имеем следующее представление:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\omega=\frac{1}{2}\left(1+\frac{te^{i\omega}}{1-te^{i\omega}}+\frac{te^{-i\omega}}{1-te^{-i\omega}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-te^{i\omega}-te^{-i\omega}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos\omega+t^2}=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{a}\cos(\varphi-\psi)+\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}.$$

Подставляя полученный результат в (1.282), получаем

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}d\psi. \tag{143}$$

Эта формула называется **формулой Пуассона,** а интеграл справа – **интегралом Пуассона**. Формула (143) позволяет записать искомое решение внутренней задачи Дирихле в форме интеграла, зависящего от параметров φ и ρ. Он существует для всех значений φ и ρ, $0\le\rho<a$ и удовлетворяет уравнению (123), а также граничному условию (124). Заметим, однако, что интеграл (143) теряет смысл при $\rho=a$. Когда говорят, что функция (143) удовлетворяет граничному условию, то под этим подразумевают, что $\lim\limits_{\rho\to a-0}u(\rho,\varphi)=f(\varphi)$. Поэтому решение внутренней задачи записывается так:

$$U(\rho,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\psi)\dfrac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}d\psi & \text{при} \quad \rho<a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho=a.\end{cases} \tag{144}$$

По аналогии решение внешней задачи имеет вид

$$U(\rho,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\psi)\dfrac{\rho^2-a^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}d\psi & \text{при} \quad \rho>a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho=a.\end{cases} \tag{145}$$

Замечание. Интеграл Пуассона дает решение плоской задачи Дирихле для круга. Но он может служить решением и пространственной задачи Дирихле в случае цилиндрической симметрии области, т.е. когда область есть бесконечный цилиндр, а искомая функция $u=u(x,y,z)$, например, температура или электрический потенциал, не зависит от z. Тогда температура или потенциал в любом сечении, перпендикулярном к оси Oz, зависит только от ρ и φ. Следовательно, здесь имеет место плоская задача Дирихле.

Задания контрольной работы

Задание №1

Классифицировать тип уравнения $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$. Определить характеристики. С помощью замены переменных привести уравнение к каноническому виду.

1. $A = 2,\ B = 5,\ C = 3$
2. $A = 2,\ B = 1,\ C = 3$
3. $A = 2,\ B = 4,\ C = 2$
4. $A = -2,\ B = 6,\ C = 3$
5. $A = 2,\ B = -1,\ C = 3$
6. $A = 2,\ B = -2,\ C = 3$
7. $A = 2,\ B = 5,\ C = -3$
8. $A = 2,\ B = -5,\ C = -3$
9. $A = 2,\ B = 3,\ C = -3$
10. $A = 1,\ B = 4,\ C = 1$

Задание № 2

Решить методом Даламбера уравнение свободных колебаний для однородной бесконечной струны. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$, $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x)$,

Исходные данные

№ варианта	$f(x)$	$F(x)$
1	$f(x) = \begin{cases} x(x-1), \text{ если } & 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$	$F(x) = 0$
2	$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } & 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} (x-1), \text{ если } & 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{ если } & 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$

4	$f(x)=\begin{cases}-x+1, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=0$
5	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sin(x), \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$
6	$f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}1, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$
7	$f(x)=\begin{cases}e^x-1, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=0$
8	$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=0$
9	$f(x)=\begin{cases}\lvert x\rvert, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}1, \text{ если } & 0\le x\le 1\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$
10	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cos(x), \text{ если } & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$	$F(x)=0$

Задание №3

Решить первую смешанную задачу методом Фурье для уравнения свободных поперечных колебаний стержня на отрезке.

1. $$\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}, 0<x<1,\ 0<t<\infty,\\ u(x,0)=x(x-1),\ u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0.\end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}, 0<x<3/2,\ 0<t<\infty,\\ u(x,0)=x(x-3/2),\ u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0,\ u(3/2,t)=0.\end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} u_{tt}=9u_{xx}, 0<x<3,\ 0<t<\infty,\\ u(x,0)=x(x-3),\ u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0,\ u(3,t)=0.\end{array}$$

4. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 2, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-2), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(2,t) = 0.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 1/4u_{xx}, 0 < x < 1/2, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-1/2), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(1/2,t) = 0.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 1, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-1), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0.\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4/9u_{xx}, 0 < x < 2/3, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-2/3), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(2/3,t) = 0.\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 1/2, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-1/2), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(1/2,t) = 0.\end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 2, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-2), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(2,t) = 0.\end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 16u_{xx}, 0 < x < 3, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-3), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(3,t) = 0.\end{aligned}$$

Задание №4

Решить первую смешанную задачу методом Фурье для уравнения вынужденных поперечных колебаний стержня на отрезке при нулевых граничных условиях.

1. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx} + 2x\sin(t), 0 < x < 1, \ 0 < t < \infty,\\ &u(x,0) = x(x-1), \ u_t(x,0) = 0,\\ &u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx}+2x\sin(2t), 0<x<3/2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3/2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(3/2,t)=0.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}&u_{tt}=9u_{xx}+x\cos(t), 0<x<3,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx}+2x+\sin(t), 0<x<2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(2,t)=0.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}&u_{tt}=1/4u_{xx}+2\sin(x)\sin(t), 0<x<1/2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1/2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(1/2,t)=0.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx}+2\sin(xt), 0<x<1,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}&u_{tt}=4/9u_{xx}+\cos(xt), 0<x<2/3,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-2/3),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(2/3,t)=0.\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx}+t\cos(x), 0<x<1/2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1/2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(1/2,t)=0.\end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx}+\cos(x)\sin(\pi t), 0<x<2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(2,t)=0.\end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned}&u_{tt}=16u_{xx}+\cos(\pi x)\sin(\pi t), 0<x<3,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

Задание №5

Найти решение первой смешанной задачи методом Фурье для уравнения теплопроводности на отрезке:

1. $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, 0 \le x \le 3/2 \\ 3 - x,\ 3/2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0$$

2. $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x,\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

3. $u'_t = 25u''_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, 0 \le x \le 5/2 \\ 5 - x,\ 5/2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(5,t) = 0$$

4. $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x,\ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0$$

5. $u'_t = 4u''_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/3, 0 \le x \le 5/2 \\ 5 - x,\ 5/2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(5,t) = 0$$

6. $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/3, 0 \le x \le 3/2 \\ 3 - x,\ 3/2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0$$

7. $u'_t = 25u''_{xx}, \ 0 < x < 8, \ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, 0 \le x \le 4 \\ 8 - x, \ 4 < x \le 8 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(8,t) = 0$$

8. $u'_t = 9u''_{xx}, \ 0 < x < 2, \ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

9. $u'_t = 16u''_{xx}, \ 0 < x < 1, \ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - x, \ 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

10. $u'_t = 4u''_{xx}, \ 0 < x < 4, \ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0$$

Литература

Основная литература:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. –т. 2. М. Наука, 2003. – 416 с.
2. Игнатьева А.В. и др. Курс высшей математики. М. Высшая школа, 1964. – 688 с.
3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Высшая школа, 1983. – 126 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М. высшая школа. 2004. – 415 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
6. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука 1969. – 286 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1962. – 767 с.
8. Будак Б.М. – М.: Наука, 1980. – 687 с.

Дополнительная литература:

1. Очан Ю.С. Методы математической физики. – М.: Высшая школа, 1965. – 283 с.

Учебные пособия кафедры:

1. Методические указания к разделу «уравнения математической физики» (уравнения гиперболического типа)/Сост. Л.А. Сахарова, М.Ф. Степанова – Уфа: УНИ, 1989. – 41 с.
2. Математические указания к разделу «Уравнения математической физики» (уравнения параболического и эллиптического типов)/Сост. М.Ф. Степанова, Л.А. Сахарова. – Уфа: УНИ, 1991. – 40 с.
3. Практикум по уравнениям математической физики. Сост. М.Ф. Степанова, В.А. Буренин, Л.А. Сахарова. – Уфа: УГНТУ, 2000.

Оглавление